

Examen Wiskundige Analyse V - Deel oefeningen

16 januari 2014, 8:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

- (i) Naam en voornaam hierboven invullen.
- (ii) Nietje niet losmaken.
- (iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.
- (iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.
- (v) Respecteer de antwoordvakken.
- (vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.

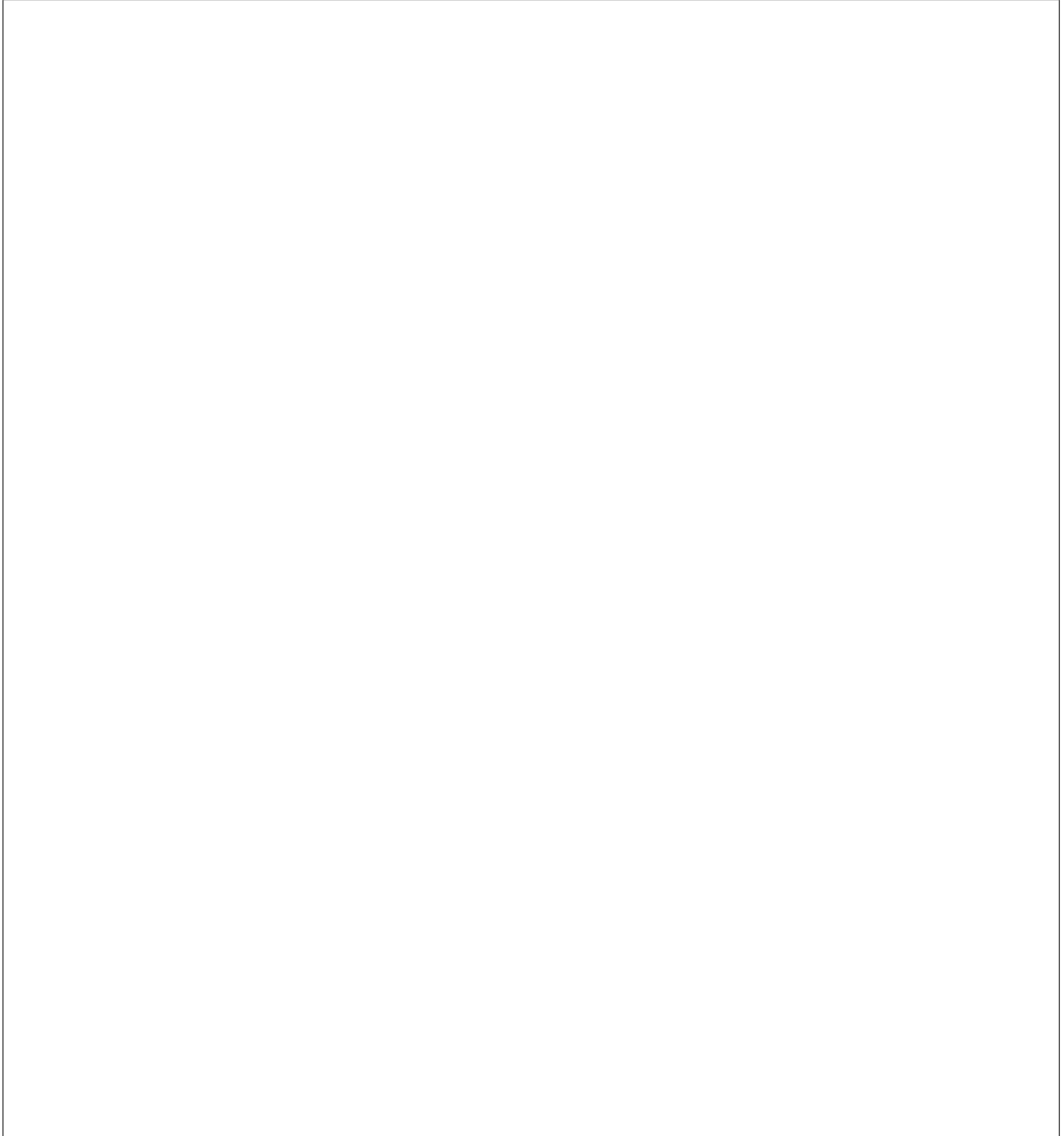
• Oefening 1

Gegeven de functies $f \in L_1$, $g \in L_1$ en een constante λ . Beschouw de vergelijking

$$h + \lambda^2 h * f * f = g$$

1.a Zij $h \in L_1$, ga na dat de convoluties zinvol zijn en bepaal een oplossing $h \in L_1$ van deze vergelijking met behulp van Fouriertransformaties.

Hint: $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \forall x.$

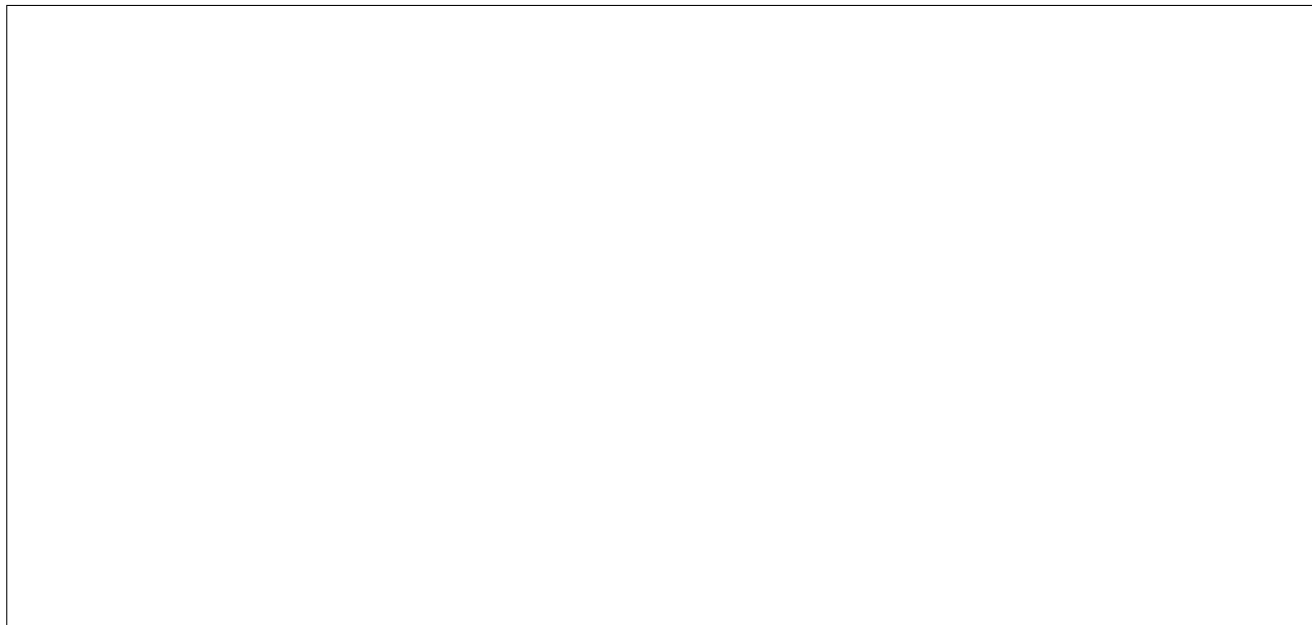




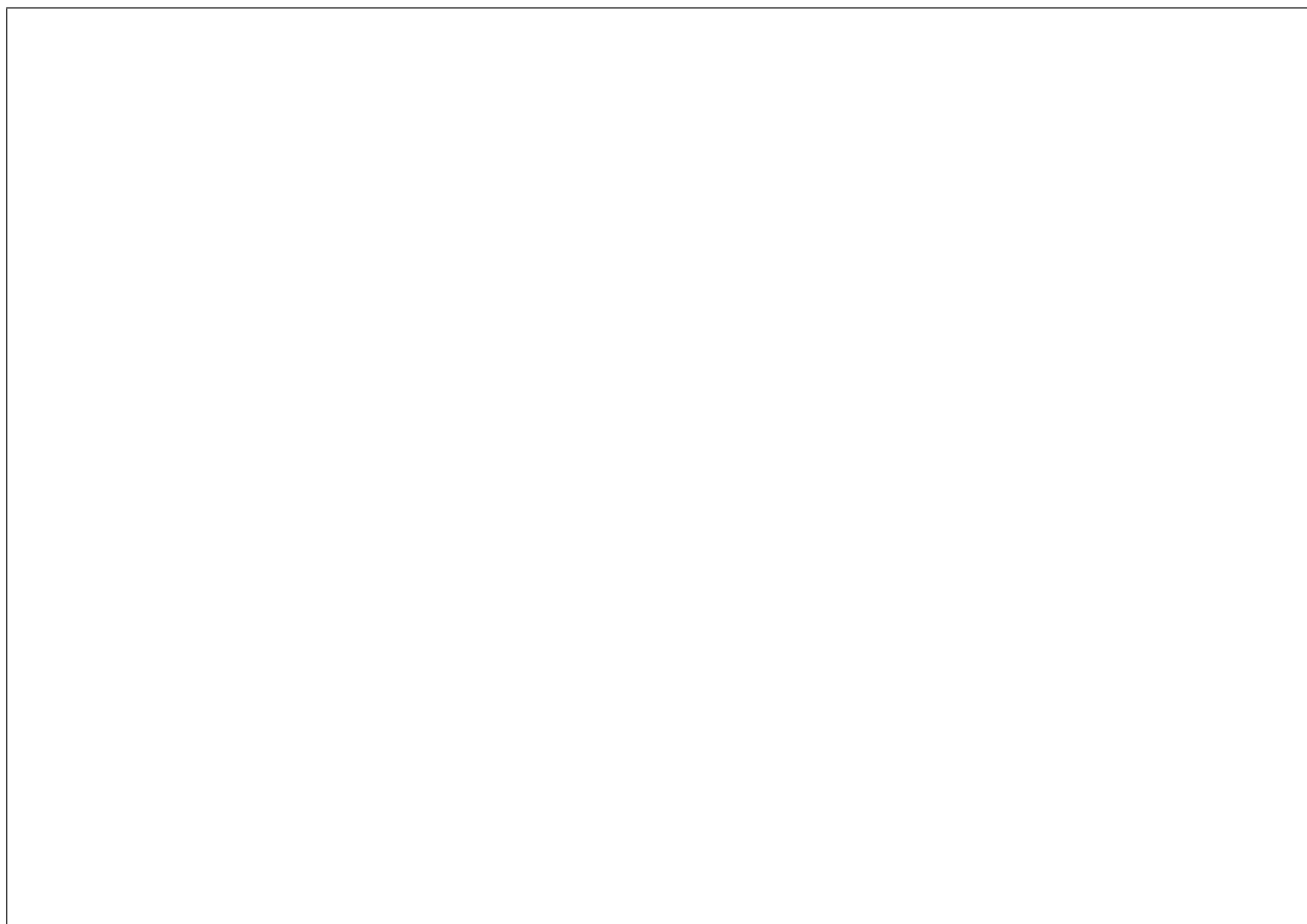
1.b Toon aan dat deze oplossing uniek is als $\|f\|_{L_1} < \frac{1}{|\lambda|}$.



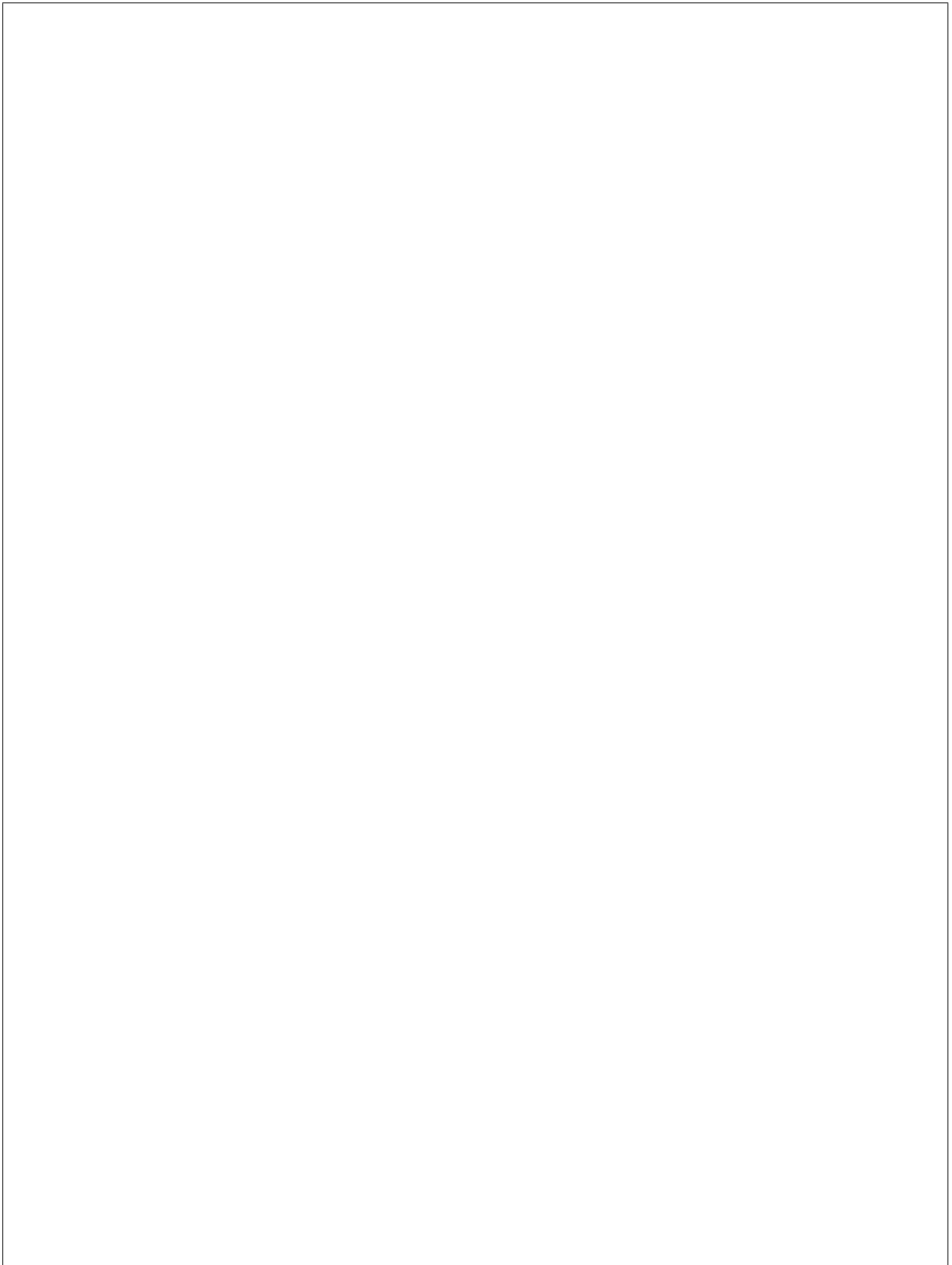
Vervolg Oefening 1.b



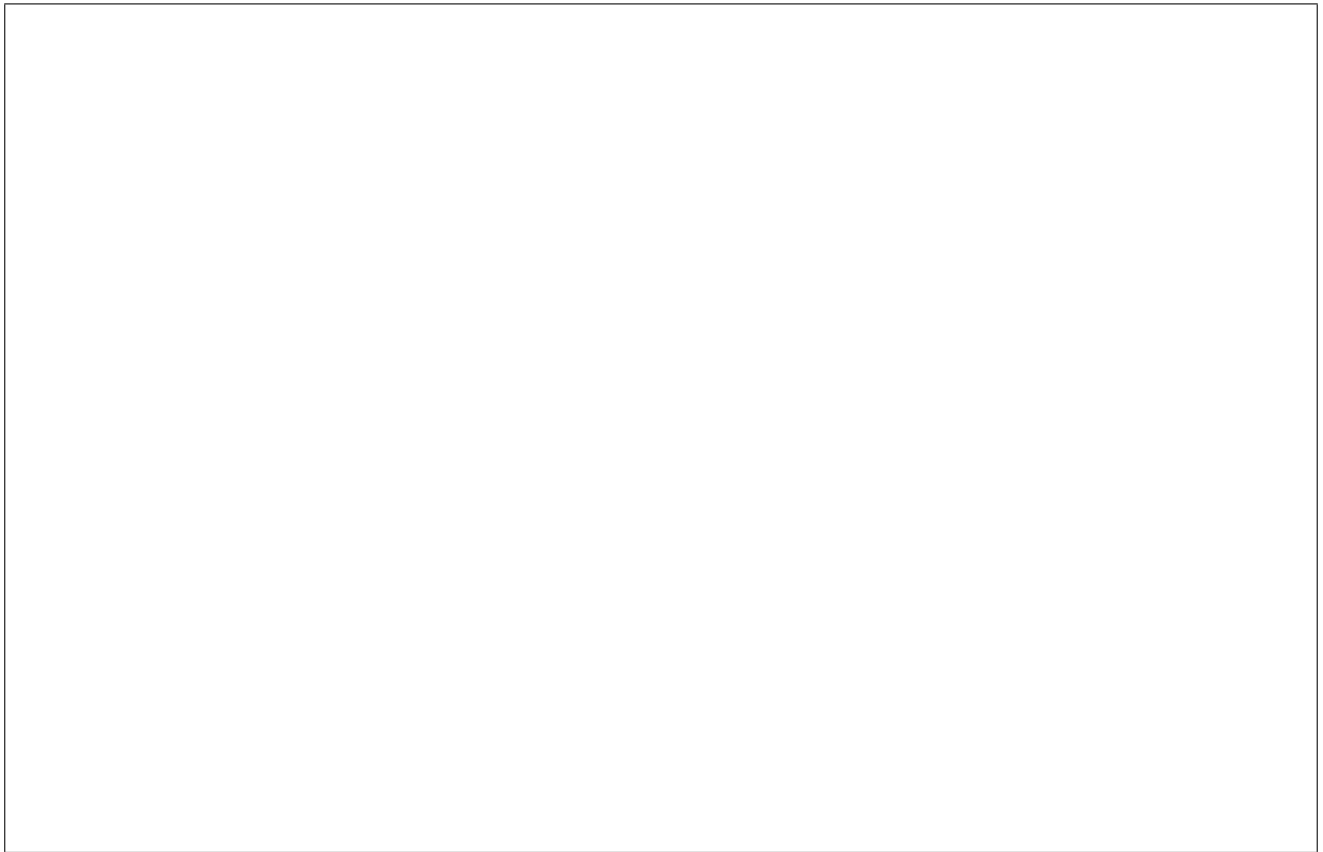
1.c Stel nu (in één dimensie) $f(x) = \exp(x)Y(-x)$, met $Y(x)$ de Heaviside functie. Bepaal voor deze f de oplossing h als functie van g . Wanneer is de oplossing h uniek?



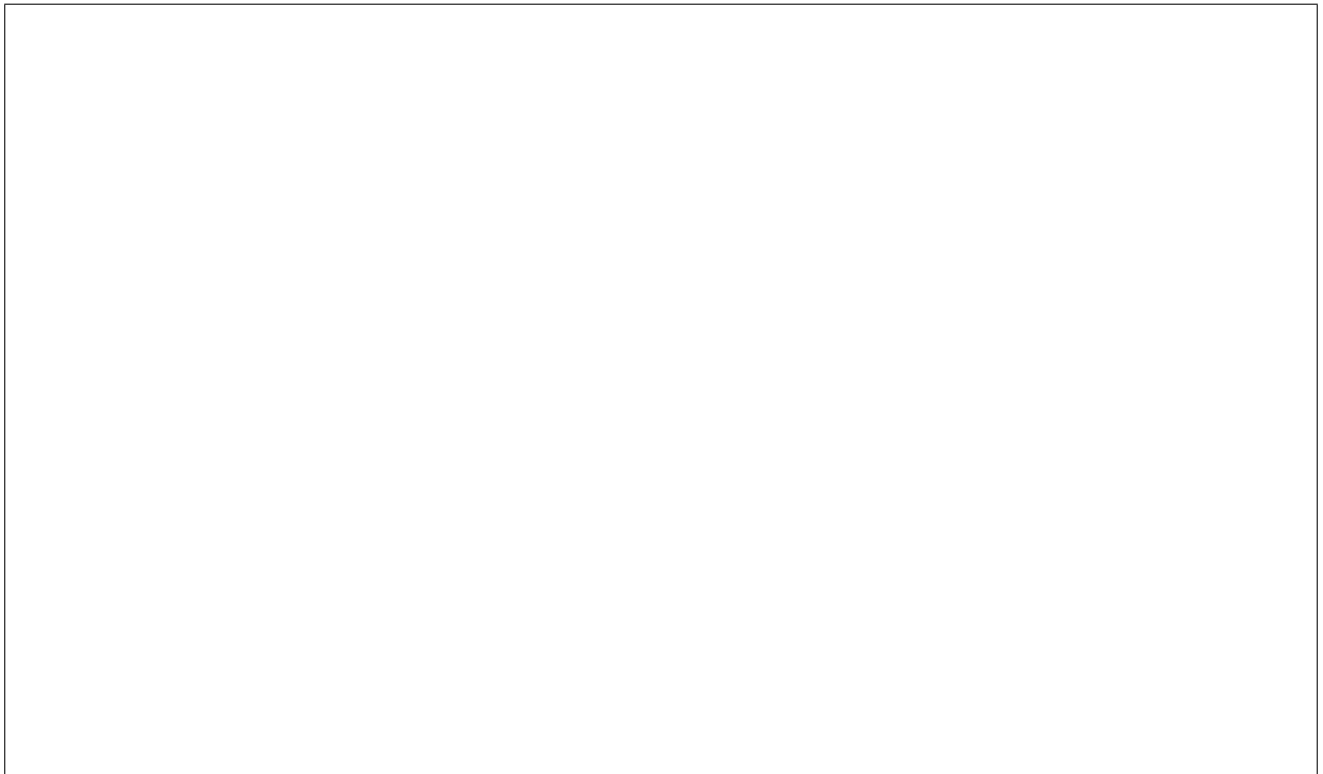
Vervolg Oefening 1.c



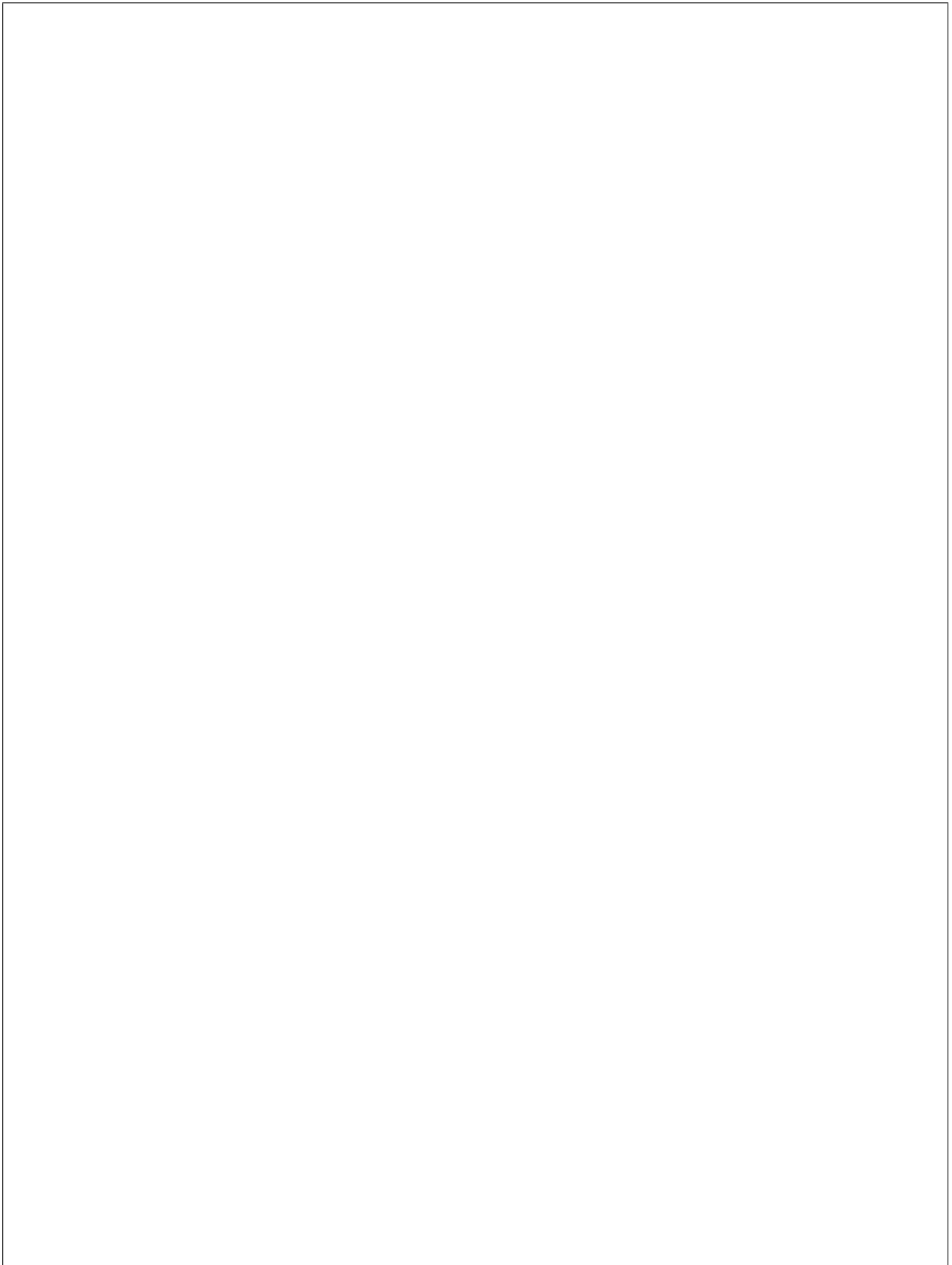
Vervolg Oefening 1.c



1.d Stel nu $g(x) = \exp(x)Y(-x)$ en $\lambda = \frac{1}{2}$. Bepaal de oplossing h en controleer door $h * f * f$ expliciet te berekenen.



Vervolg Oefening 1.d

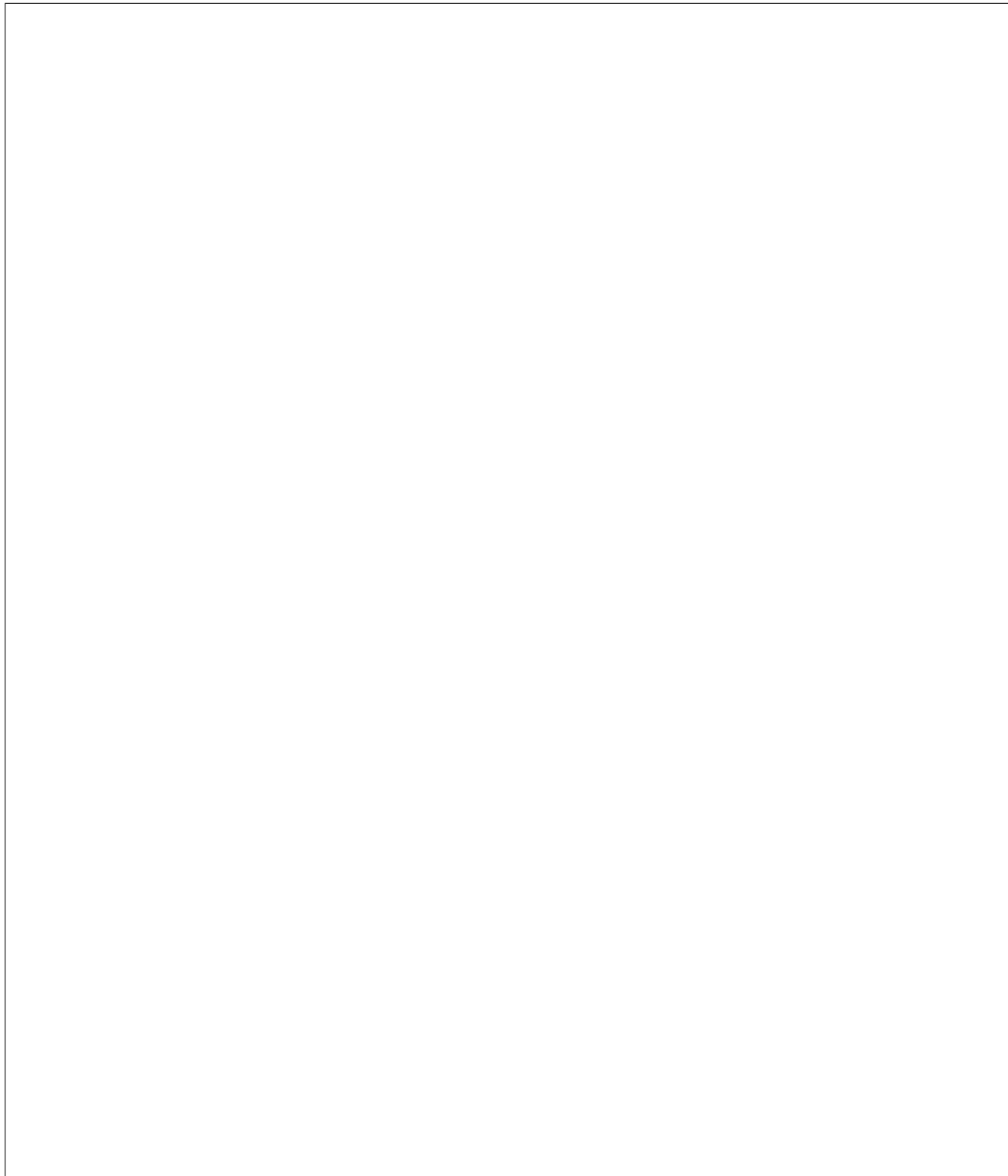


- Oefening 2

Voor een distributie $T(x) \in \mathcal{D}^*$ beschouwen we zijn reflectie, genoteerd $T(-x)$, gedefiniëerd als volgt:

$$\langle T(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi(-x) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

2.a Bepaal de distributie $\delta^{(k)}(-x)$.



2.b Is de distributie $x^n \delta^{(k)}(-x)$ met $n \leq k$ getemperd? Verklaar.

2.c Bepaal de fouriertransformatie van $x^n \delta^{(n+k)}(-x)$. Maak hiervoor gebruik van de gekende gelijkheid

$$x^n \delta^{(k)}(x) = (-1)^n \frac{k!}{(k-n)!} \delta^{(k-n)}(x), \quad n \leq k.$$

