Examen Wiskundige Analyse V - Deel oefeningen

16 januari 2014, 8:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

(i) Naam en voornaam hierboven invullen.

(ii) Nietje niet losmaken.

(iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.

(iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.

(v) Respecteer de antwoordvakken.

(vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.

- Oefening 1

Gegeven de functies $f \in L_1$, $g \in L_1$ en een constante λ. Beschouw de vergelijking

$$h + \lambda^2 \, h * f * f = g$$

1.a Zij $h \in L_1$, ga na dat de convoluties zinvol zijn en bepaal een oplossing $h \in L_1$ van deze vergelijking met behulp van Fouriertransformaties.

Hint: $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, x^{2k}, \forall x.$

1.b Toon aan dat deze oplossing uniek is als $\|f\|_{L_1} < \dfrac{1}{|\lambda|}$.

Vervolg Oefening 1.b

1.c Stel nu (in één dimensie) $f(x) = \exp(x)\, Y(-x)$, met $Y(x)$ de Heaviside functie. Bepaal voor deze f de oplossing h als functie van g. Wanneer is de oplossing h uniek?

Vervolg Oefening 1.c

Vervolg Oefening 1.c

1.d Stel nu $g(x) = \exp(x)\,Y(-x)$ en $\lambda = \frac{1}{2}$. Bepaal de oplossing h en controleer door $h * f * f$ expliciet te berekenen.

Vervolg Oefening 1.d

- Oefening 2

Voor een distributie $T(x) \in \mathcal{D}^*$ beschouwen we zijn reflectie, genoteerd $T(-x)$, gedefinieerd als volgt:

$$\langle T(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi(-x) \rangle \,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

2.a Bepaal de distributie $\delta^{(k)}(-x)$.

2.b Is de distributie $x^n\,\delta^{(k)}(-x)$ met $n \leqslant k$ getemperd? Verklaar.

2.c Bepaal de fouriertransformatie van $x^n\,\delta^{(n+k)}(-x)$. Maak hiervoor gebruik van de gekende gelijkheid

$$x^n\,\delta^{(k)}(x) = (-1)^n\,\frac{k!}{(k-n)!}\,\delta^{(k-n)}(x), \qquad n \leqslant k.$$