Wiskundige Methoden in de Fysica
examen

24 januari 2017

Voor dit examen krijg je 4u tijd en mag je de cursus en de oefeningenopgaven gebruiken. Niet toegelaten zijn opgeloste oefeningen, handboeken, rekenmachines en communicatiemiddelen. **Gebruik een apart antwoordblad voor elke vraag. Schrijf je naam op elk blad!** Veel succes!

1. (4pt) Bewijs onderstaande operator-identiteiten, waarbij $\hat{\vec{L}} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$ de kwantummechanische draaimoment**operator** is:

   (a) $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\vec{r} \times \hat{\vec{L}}}{r^2}$

   (b) $\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} = i\hat{\vec{L}}$

   Hint: Laat beide leden inwerken op een scalair veld f.

2. (6pt) Toon aan dat

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi^3}{8}, \tag{1}$$

   met behulp van complexe contourintegratie. Vertrek hiervoor van de volgende complexe contour integraal,

$$\oint \frac{\mathrm{LN}^3(z)}{1+z^2} dz. \tag{2}$$

   en leg de vertakkingslijn langs de positieve reële as.

   Hint: De binomiaalformule $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ en de integraal $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}) + C$ kunnen van pas komen.

3. (4pt) Bereken y(t) voor $t > 0$ die voldoet aan

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 100 \exp(-2t) \tag{3}$$

   met $y(0) = -1$ en $y'(0) = 0$ via de Laplacetransformatie.

4. (6pt) We beschouwen een afgesloten rechthoekig gebied $0 \leq x \leq \ell$, $0 \leq y \leq b$ waarin een stof met concentratie $c(x, y, t)$ zich zal verspreiden met diffusiecoëfficiënt D. De initiële concentratie is $c_0(x)$ en er wordt stof toegevoegd aan een tempo $I(x, t)$.

   (a) Formuleer het probleem in een partiële differentiaalvergelijking, inclusief de rand- en beginvoorwaarden.

   (b) Welke voorwaarden zijn aanwezig die je toelaten om dit probleem op te lossen zonder y-afhankelijkheid?

We lossen nu 3 verwante problemen op met toenemende moeilijkheidsgraad:

   (c) **Probleem 1**: Geef de algemene oplossing $c_1(x, t)$ van de homogene vergelijking (d.w.z. met bronterm $I(x, t) = 0$), via de methode van scheiden der veranderlijken. Hierin komen onbekende coëfficiënten a_n voor.

   (d) **Probleem 2**: Beschouw het diffusieprobleem met beginvoorwaarde $c(x, 0) = 0$ en een bronterm $I(x, t) = I\delta(t)H(a-x)$ met H de Heaviside stapfunctie. D.w.z. dat er stof wordt geïnjecteerd in het gebied $x < a$ op $t = 0$.

      i. Integreer de diffusievergelijking met deze bronterm tussen $t = -\epsilon$ en $t = +\epsilon$ met $\epsilon \to 0$, en gebruik dat $c(-\epsilon) = 0$. Waarom geldt dat $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} (\partial_x^2 c) dt = 0$?

      ii. Substitueer de algemene oplossing die je vond voor probleem 1 en bepaal zo de coëfficiënten a_n voor het huidige geval. Toon aan dat deze oplossing de vorm heeft van

$$c_2(x, t) = \frac{aI}{L} H(t) + \frac{2I}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_n a}{k_n} H(t) \exp(-k_n^2 Dt) \cos(k_n x) \qquad (4)$$

      voor zekere k_n.

   (e) **Probleem 3**: Er vindt een constante injectie van stof plaats over het tijdsinterval $[0, T]$, aan een snelheid I. Door lineaire superpositie kan men inzien dat de oplossing van dit probleem gegeven wordt door

$$c_3(x, t) = \int_0^T dt_0 c_2(x, t - t_0). \qquad (5)$$

      i. Bereken $c_3(x, t)$ uit het resultaat van probleem 2. Maak hierbij onderscheid tussen $t < T$ en $t > T$.

      ii. Wat zal de concentratieverdeling zijn voor $t \to +\infty$? Vind je dezelfde waarde door enkel de injectiesnelheid, duur en grootte van het gebied te beschouwen?

Veel succes!