Voorbeeldexamen theorie differentiaalmeetkunde

1. Beschouw een reguliere kromme $\mathbf{c}(s)$ met s booglengte als parameter, gedefinieerd in een omgeving van $s = 0$. Onderstel dat de kromming en de wringing niet nul zijn voor $s = 0$. Indien we de vectorfunctie $\mathbf{c}(s)$ ontwikkelen in de buurt van $s = 0$ krijgen we:

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(0) + s\mathbf{c}'(0) + \frac{s^2}{2}\mathbf{c}''(0) + \frac{s^3}{6}\mathbf{c}'''(0) + \text{rest.}$$

   (i) Gebruik de basis van Frenet om hieruit de kanonische lokale voorstelling op te stellen.

   (ii) Bespreek haar projecties op het osculatievlak, het normaalvlak en het rectificerend vlak aan de hand van enkele grafieken.

   (iii) Wat is de meetkundige betekenis van het teken van de wringing? Bespreek hoe het teken van de wringing het beeld van de schroeflijn $\mathbf{c}(s) = (\cos(\lambda s), \sin(\lambda s), k\lambda s)$ (met $k \neq 0$ en $\lambda = 1/\sqrt{1+k^2}$) beïnvloedt.

   (iii) Maak een samenvattende figuur van de algemene kromme $\mathbf{c}(s)$ (in drie dimensies) voor het geval dat $\tau(0) > 0$. Teken op die figuur de kromme, de zin waarin ze doorlopen wordt, de Frenetbasis voor $s = 0$, het osculatievlak, het normaalvlak en het rectificerend vlak. Maak op de figuur duidelijk hoe de kromme ligt t.o.v. het osculatievlak en het rectificerend vlak.

   De Formules van Frenet worden, indien nodig, gegeven door:

$$\mathbf{t}' = \frac{1}{\rho}\mathbf{n},\ \mathbf{n}' = -\frac{1}{\rho}\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \text{ en } \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}, \quad \text{met } \tau = \rho^2(\mathbf{t}\ \mathbf{t}'\ \mathbf{t}'').$$

2. (i) Geef een voorbeeld naar keuze van een differentieerbare variëteit M, verschillend van $\mathbb{R}^n$, waarvan de atlas minstens twee kaarten bevat. Controleer expliciet dat aan alle voorwaarden van de definitie van een atlas voldaan is.

   (ii) Beschouw een differentieerbare variëteit M en de raakruimte T_mM in $m \in M$. Beschouw ook een kaart (U, ϕ) met $m \in U$. Wanneer noemen we twee $\mathcal{C}^\infty$-krommen c_1 en c_2 rakend in m? Leg uit waarom deze definitie onafhankelijk is van de gekozen kaart.

   (iii) De raakvector aan een kromme c door $m \in M$ wordt gegeven door

$$v_m^c(f) = \frac{d}{dt}(f \circ c)\,|_{t=0}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_m(M).$$

   Verifieer dat v_m^c voldoet aan alle axioma's van een raakvector. Bepaal tevens de coëfficienten van v_m^c t.o.v. de natuurlijke basis $\partial/\partial q^i|_m$ van T_mM.

   (iv) Toon aan dat de raakruimte T_mM de verzameling is van equivalentieklassen van rakende krommen in m.