Relaties en Structuren: oefeningen

Eerste Bachelor Wiskunde

Jan De Beule – Bert Seghers

5 september 2014, 8:30

1. Waar of vals? Bewijs of geef een tegenbewijs.

   - $\{(n, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid n = \pi \cdot r\}$ is een aftelbare verzameling
   - Zij I een indexverzameling en $\{B_i \mid i \in I\}$ en $\{C_i \mid i \in I\}$ families verzamelingen.

   $$(\forall i \in I : |B_i| = |C_i|) \quad \Rightarrow \quad \left|\bigcup_{i\in I} B_i\right| = \left|\bigcup_{i\in I} C_i\right|$$

   - Zijn A en B verzamelingen. Als er een $K \subseteq A$ bestaat met $|K| = |B|$, dan bestaat er een surjectie van A naar B.

2. Noteer $\text{ggd}(u, v) = 1$ met $u \perp v$. Bewijs de volgende drie getaltheoretische feiten.

   - Als $a \perp b$, dan is

   $$a \perp y \ \wedge \ b \perp x \quad \Leftrightarrow \quad ax + by \perp ab.$$

   - Als $a \perp b$, dan is

   $$y \equiv y' \pmod{a} \ \wedge \ x \equiv x' \pmod{b} \quad \Leftrightarrow ax + by \equiv ax' + by' \pmod{ab}.$$

   - De multiplicativiteit van Eulers φ a.d.h.v. bovenstaande observaties.

3. In een groep van 24 mensen zitten twee vijanden. Ze zullen verdeeld worden over twee ronde tafels van 12.

   - Als elke partitie dezelfde kans heeft, hoe groot is dan de kans dat de vijanden aan dezelfde tafel zullen zitten?
   - Hoeveel mogelijkheden zijn er om de 24 mensen zodanig aan de ronde tafels te schikken, dat de vijanden niet naast elkaar zitten? (Twee schikkingen zijn dezelfde als ze uit elkaar worden bekomen door draaien en/of wisselen van de tafels.)

4. Bewijs dat, voor $0 \leq m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}.$$

5. Los de volgende vierdegraadsvergelijkingen op over de vermelde algebraïsche structuur.

$$\begin{array}{ll}
x^4 \equiv 1 \pmod{24} & \text{over } \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \\
x^4 = 1 & \text{over } \mathbb{F}_{25} \\
x^4 \equiv 13 \pmod{26} & \text{over } \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \\
x^4 = 2 & \text{over } \mathbb{F}_{27} \\
x^4 \equiv 0 \pmod{28} & \text{over } \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}
\end{array}$$