

Examen Projectieve Meetkunde: oefeningen

2de bachelor Wiskunde

maandag 23 juni 2014

*"This is going to end badly."
"You say that of everything."
"Aye, m'lord. Usually I'm right."*

*Eddison Tollett and Jon Snow
in A Song of Ice and Fire, A Dance with Dragons, Jon VIII*

Oefening 1. Een KM-boog van type t , $2 \leq t \leq q$, in $\text{PG}(2, q)$ is een verzameling van $q + t$ punten zodat iedere rechte $0, 2$ of t punten met deze verzameling gemeen heeft. Een rechte die i punten met de KM-boog gemeen heeft, noemen we een i -secant.

- (i) Geef een voorbeeld van een KM-boog van type q in $\text{PG}(2, q)$ en geef een voorbeeld van een KM-boog van type 2 in $\text{PG}(2, 32)$.
- ✓(ii) Beschouw een KM-boog \mathcal{S} van type t in $\text{PG}(2, q)$. Tel het aantal 0 -secanten, 2 -secanten en t -secanten aan \mathcal{S} .
- ✓(iii) Beschouw een t -secant ℓ aan de KM-boog \mathcal{S} van type t . Toon aan dat elke rechte minstens één punt gemeen heeft met de verzameling $(\mathcal{S} \setminus \ell) \cup (\ell \setminus \mathcal{S})$.
- (iv) Veronderstel dat er een KM-boog \mathcal{S} van type t bestaat in $\text{PG}(2, q)$, met $t < q$. Toon aan dat q even is en dat $t \mid q$.
- ✗ (v) Construeer een KM-boog van type $\frac{q}{2}$ in $\text{PG}(2, q)$, $q > 4$ even, waartoe de punten $\{(1, 0, a) \mid \text{tr}(a) = 0\}$ behoren, en waarvan alle punten op de rechten $X_0 = 0$, $X_1 = 0$ en $X_0 + X_1 = 0$ liggen. Hierbij is tr de spoorafbeelding van \mathbb{F}_q naar \mathbb{F}_2 .

Oefening 2. Beschouw de punten $P(1, 0, 0)$ en $Q(0, 1, 0)$, en de rechte $\ell : X_0 = 0$ in $\text{PG}(2, \mathbb{F})$.

- ♥(i) Beschrijf (geef de vergelijking van) alle absoluut irreduciebele kegelsneden die P bevatten en die in Q raken aan ℓ . Noem deze verzameling \mathcal{S} .
- ✓(ii) Veronderstel (enkel in dit gedeelte) dat $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$. Tel het aantal elementen in \mathcal{S} . Tel ook het aantal elementen in \mathcal{S} door een vast punt niet op ℓ .
- ✓(iii) Beschouw het punt $R(0, 0, 1)$ op ℓ . Welke punten in $\text{PG}(2, \mathbb{F})$ kunnen een raakpunt op een raaklijn door R aan een kegelsnede van \mathcal{S} zijn? Beschrijf deze verzameling meetkundig.

Oefening 3. Beschouw een hermitische polariteit β in $\text{PG}(n, q^2)$ met bijhorend veldautomorfisme θ . Noteer de absolute punten van β als \mathcal{H} . Beschouw ook een Baerdeelmeetkunde $\mathcal{B} \cong \text{PG}(n, q)$ van $\text{PG}(n, q^2)$. Toon aan dat $\mathcal{H} \cap \mathcal{B}$ een kwadriek (puntenverzameling beschreven door kwadratische vergelijking) in \mathcal{B} bepaalt.