Analyse IV

1. Toon aan dat een padsamenhangende topologische ruimte samenhangend is.

2. Toon aan dat een eerste aftelbaarheidsruimte X rijcompact is als en slechts als elke dalende rij $(F_n)_n$ van niet-lege, gesloten deelverzamelingen van X een niet-lege doorsnede heeft.

3. Beantwoord de vragen:

Stelling 1. *Zij $\lambda \in \mathbb{C}$ en $m \in \mathbb{N}$. De oplossingen $z(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ van de (scalaire) vergelijking $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^m z(t) = 0$ zijn juist $p(t)e^{\lambda t}$, met $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ en $\deg p < m$.*

Bewijs. Omdat $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)(p(t)e^{\lambda t}) = p'(t)e^{\lambda t}$, zijn $\underline{p(t)e^{\lambda t}\text{ oplossingen als }\deg p < m}$ [1]. Omdat de oplossingen van een homogene lineaire differentiaalvergelijking een vectorruimte vormen, leert de existentie en uniciteit van oplossingen dat voor een vergelijking van orde n de dimensie van de oplossingenruimte juist n is. De n lineair onafhankelijke oplossingen $t^j e^{\lambda t}$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ brengen dus heel de oplossingenruimte voort. □

Stelling 2. *Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ en $z_0 \in \mathbb{C}^n$ met $(\lambda I - A)^m z_0 = 0$. Als $\varphi(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ een (complexwaardige) oplossing is van de vergelijking $x' = Ax$ met beginwaarde $x(0) = z_0$, dan is $\varphi(t) = e^{\lambda t}(p_1(t), \ldots, p_n(t))$ voor zekere $p_j(t) \in \mathbb{C}[t]$ met $\deg p_j < m$ $(j = 1, \ldots, n)$.*

Bewijs. Omdat $(A\varphi)'(t) \overset{[2]}{=} A(\varphi'(t)) = A(A\varphi(t))$, is ook $A\varphi$ een oplossing van $x' = Ax$, en inductief is ook $A^n\varphi$ een oplossing voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan is ook $(\lambda I - A)^m\varphi$ een oplossing, met $(\lambda I - A)^m\varphi(0) = (\lambda I - A)^m z_0 = 0$. Door uniciteit van oplossingen van $x' = Ax$ (ook voor complexwaardige oplossingen door het nemen van het reëel en imaginair deel) is $\underline{(\lambda I - A)^m\varphi = 0}$ [3]. D.w.z. dat $\left(\lambda - \frac{d}{dt}\right)^m \varphi = 0$. Door het vorige lemma is elke $\varphi_j(t) = p_j(t)e^{\lambda t}$ voor zekere $p_j(t) \in \mathbb{C}[t]$ met $\deg p_j < m$. □

[1,2] Verklaar.
[3] Hoe volgt dit uit uniciteit van oplossingen?

4. Beantwoord de vragen:

Stelling 3 (Stelling van de impliciete functies). *Zij f een continue functie $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ waarvoor de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ bestaan en continu zijn $(j = 1, \ldots, m)$ in een omgeving in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ van $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.*
Als $f(a, b) = 0$ en $\det D_2 f(a, b) \neq 0$, dan bestaat een omgeving U van a (in $\mathbb{R}^n$), een omgeving V van b (in $\mathbb{R}^m$) en een unieke afbeelding $g\colon U \to V$ waarvoor

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Bovendien is de afbeelding $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ continu.

Bewijs. D.m.v. een translatie mogen we aannemen dat $(a, b) = (0, 0)$.
Omdat $\det D_2 f(0, 0) \neq 0$, bestaat $(D_2 f(0, 0))^{-1} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. We bekijken de afbeelding

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : F(x, y) := y - (D_2 f(0, 0))^{-1}(f(x, y)).\text{[1]}$$

Door de gegevens is F continu in een omgeving van $(0, 0)$. We gaan na of aan de gelijkmatige contractie-ongelijkheid voldaan is. Omdat

$$D_2 F(x, y) = \mathrm{id} - (D_2 f(0, 0))^{-1} \circ D_2 f(x, y) = (D_2 f(0, 0))^{-1} \circ (D_2 f(0, 0) - D_2 f(x, y))$$

(hierbij is id de identieke afbeelding) is

$$\begin{aligned}\|F(x, y_2) - F(x, y_1)\| &\overset{[2]}{\leq} \sup_{y\in[y_1,y_2]} \|D_2 F(x, y)\| \|y_2 - y_1\| \\ &\leq \|(D_2 f(0, 0))^{-1}\| \sup_{y\in[y_1,y_2]} \|D_2 f(0, 0) - D_2 f(x, y)\| \|y_2 - y_1\|.\end{aligned}$$

Alle componenten $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ van $D_2 f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times m}$ zijn continu in $(0,0)$, zodat de afbeelding $D_2 f$ continu is in $(0,0)$. Daardoor bestaat $\delta > 0$ zo dat $\|D_2 f(0,0) - D_2 f(x,y)\| \le \frac{1}{2\|(D_2 f(0,0))^{-1}\|}$ zodra $\|x\| \le \delta$ en $\|y\| \le \delta$, zodat

$$\|F(x,y_2) - F(x,y_1)\| \le \tfrac{1}{2}\|y_2 - y_1\|, \text{ zodra } \|x\| \le \delta,\ \|y_1\| \le \delta,\ \|y_2\| \le \delta.$$

We gaan nu na dat $F(x,y) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0,\delta)$ als $y \in \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0,\delta)$ [3]. Hiertoe merken we op dat voor $\|x\| \le \delta$ en $\|y\| \le \delta$,

$$\|F(x,y)\| \le \|F(x,y) - F(x,0)\| + \|F(x,0)\| \le \tfrac{1}{2}\|y\| + \|F(x,0)\|\,.$$

Nu bestaat $\delta' \le \delta$ zo dat $\|F(x,0)\| \le \delta/2$, zodra $\|x\| \le \delta'$, zodat $\|F(x,y)\| \le \delta$, zodra $\|x\| \le \delta'$ en $\|y\| \le \delta$. Omdat $\overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0,\delta)$ compleet is, kunnen we de contractiestelling toepassen op de (gerestringeerde) afbeelding

$$F:\ \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,\delta') \times \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0,\delta) \to \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0,\delta),$$

en vinden zo voor elke $x \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,\delta')$ een unieke $g(x) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0,\delta)$ waarvoor $F(x,g(x)) = g(x)$, d.w.z., waarvoor $f(x,g(x)) = 0$ [4]. Ook is $g\colon \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,\delta') \to \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0,\delta)$ continu. $\square$

[1] Geef (heuristisch) aan waarom we kunnen verwachten dat de functie F lokaal een contractie zal zijn.
[2,4] Verklaar.
[3] Waarom moeten we dit nagaan?