theorie

1. Toon aan:

   Stelling. *Zij $a_n \in \mathbb{C}$ en $0 < r < R$. Als $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ voor elke $z \in B(0,R)$, dan is*

   $$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+(0,r)} \frac{f(z)}{z^{m+1}}\, dz, \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

   en toon de integraalformule van Cauchy aan voor deze functie f.

2. Toon aan:

   Stelling. *Als z_0 een geïsoleerd singulier punt is van f met*

   $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^N f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

   voor zekere $N \in \mathbb{N}$ $(N > 0)$, dan is z_0 een pool van orde N en

   $$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \Big((z - z_0)^N f(z) \Big)^{(N-1)}.$$

3. Beantwoord de vragen:

   Stelling. *Een nietconstante complexe veelterm heeft minstens één complex nulpunt.*

   Bewijs. Zij P een complexe veelterm zonder complexe nulpunten. Dan is $1/P$ een gehele functie. [1] Verder is $1/P$ begrensd op $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,R)$ [2] (zekere $R > 0$). Omdat $1/P$ continu is en $\overline{B}(0,R)$ compact, is $1/P$ ook begrensd op $\overline{B}(0,R)$ [3]. Bijgevolg is $1/P$ begrensd op heel $\mathbb{C}$ [4], zodat $1/P$ (en dus ook P) constant [5] is. [6] □

   [1] Definieer 'gehele functie'. Waarom is $1/P$ een gehele functie?
   [2-3] Verklaar.
   [4] Toon aan waarom begrensdheid op $\overline{B}(0,R)$ en op $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,R)$ begrensdheid op $\mathbb{C}$ impliceert.
   [5] Waarom is $1/P$ constant?
   [6] Hoe volgt de stelling hieruit?

4. Beantwoord de vragen:

   Stelling.

   $$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

   definieert een holomorfe afbeelding op het halfvlak $\operatorname{Re} z > 0$.

   Bewijs. Als $x = \operatorname{Re} z > 0$, dan convergeert de integraal absoluut:

   $$|\Gamma(z)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left| t^{z-1} e^{-t} \right| dt \overset{[1]}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(x).$$

   ! Verder is $\Gamma_n(z) := \int_{1/n}^{n} e^{-t} t^{z-1}\, dt$ holomorf op het halfvlak $\operatorname{Re} z > 0$ [2], voor elke $n \in \mathbb{N}$. We ! tonen aan dat $\Gamma_n(z) \to \Gamma(z)$ gelijkmatig op elke strook $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$ (met $0 < a < b$), zodat Γ holomorf is [3].

   $$|\Gamma_n(z) - \Gamma(z)| \leqslant \int_0^{1/n} e^{-t} t^{x-1}\, dt + \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \leqslant \int_0^{1/n} e^{-t} t^{a-1}\, dt + \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{b-1}\, dt \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 [4]$$!

   omdat $\Gamma(a)$ en $\Gamma(b)$ convergente oneigenlijke integralen zijn. [5] □

[1] Verklaar de gelijkheid.
[2] Formuleer de stelling die hier toegepast wordt, en ga na dat de voorwaarden voldaan zijn om haar hier toe te passen. Zouden we deze stelling ook kunnen toepassen om meteen te besluiten dat $\int_0^n e^{-t}t^{z-1}\,dt$ holomorf is? Leg uit.
[3] Formuleer de stelling die hier toegepast wordt, en ga na dat de voorwaarden voldaan zijn om haar hier toe te passen.
[4] Leg uit hoe uit deze regel de gelijkmatige convergentie volgt.
[5] Waar wordt gebruikt dat $\Gamma(a)$ en $\Gamma(b)$ convergeren? Leg uit.

5. Beantwoord de vragen:

Hulpstelling. *Zij $\Gamma \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ een contour met parametervoorstelling $z = z(t)$ $(t \in [a,b])$. Dan is*

$$\theta(t) := \operatorname{Im} \int_a^t \frac{z'(s)}{z(s)}\,ds$$

een continue afbeelding $[a,b] \to \mathbb{R}$ met $\theta(a) = 0$ en met de eigenschap dat $\arg(z(a)) + \theta(t)$ een poolhoek is voor $z(t)$ voor elke $t \in [a,b]$.

Bewijs. 1. Omdat $z(t)$ van de klasse C^1 is op $[a,b]$ is $z'(t)/z(t)$ continu op $[a,b]$, zodat θ continu is wegens ... [1].
Omdat $0 \notin \Gamma$ en Γ compact is, is $B(0,\varepsilon) \cap \Gamma = \varnothing$ [2] voor zekere $\varepsilon > 0$. Nu is $z(t)$ gelijkmatig continu [3] op de compacte verzameling $[a,b]$, zodat $\delta > 0$ bestaat met de eigenschap dat $|s-t| < \delta$ impliceert dat $|z(s) - z(t)| < \varepsilon$. Kies nu $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ zo dat $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ voor $i = 1, \ldots, N$. Noem $z_i := z(t_i)$. Dan is $z(]t_{i-1}, t_i[) \subseteq B(z_i, \varepsilon)$ [4]. Nu is $B(z_i,\varepsilon) \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ een open gebied zonder gaten, waarop een holomorfe ln bestaat. Bijgevolg is voor elke $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\theta(t) - \theta(t_{i-1}) = \operatorname{Im}\int_{t_{i-1}}^t \frac{z'(s)}{z(s)}\,ds = \operatorname{Im}\int_{z_{i-1}}^{z(t)} \frac{dz}{z} = \operatorname{Im}(\ln z(t)) - \operatorname{Im}(\ln z_{i-1}).$$

Als dus $\arg(z(a)) + \theta(t_{i-1})$ een poolhoek is voor z_{i-1}, dan is ook

$$\arg(z(a)) + \theta(t) = \big(\arg(z(a)) + \theta(t_{i-1})\big) + \big(\theta(t) - \theta(t_{i-1})\big)$$

een poolhoek voor $z(t)$ [5]. Inductief geldt de gezochte eigenschap op elk interval $[t_{i-1}, t_i]$. □

[1] Vul aan en leg uit.
[2-4] Verklaar.
[5] Leg uit waarom $\arg(z(a)) + \theta(t)$ een poolhoek is voor $z(t)$.

6. (a) Zij f een continue afbeelding $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en $a < b$. Is dan $\operatorname{Im}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt$?
   (b) Zij f een continue afbeelding $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en Γ een eenvoudige contour. Is dan $\operatorname{Im}\int_{\Gamma_+} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_+} \operatorname{Im} f(z)\,dz$?

   Motiveer je antwoord.

7. Geldt de volgende uitspraak voor een *willekeurig* open gebied $\Omega \subseteq \mathbb{C}$?
   Als f een primitieve heeft op Ω, en $\Gamma \subseteq \Omega$ is een gesloten contour, dan is $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.
   Motiveer je antwoord.

8. Voor welke $z \in \mathbb{C}$ is
   (a) $(\sqrt{z})^2 = z$?
   (b) $\sqrt{z^2} = z$?

   Motiveer je antwoord.