Examen THEORETISCHE MECHANICA - 19/06/2014 - 8:30

Eerste examenperiode

Theorie

T1. (i) Beschouw een deeltje met massa m dat onderworpen is aan een krachtwet $\mathbf{F} = (-k/r^2)\mathbf{e}_r$.

(i) Leid uit de vectoriële bewegingsvergelijking af dat het impulsmoment $\mathbf{L}$ om de oorsprong O en de Laplace-Runge-Lenz vector $\mathbf{R} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - (k/r)\mathbf{r}$ constanten van de beweging zijn. Onderstel in hetgeen volgt dat $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$.

(ii) Toon aan dat de beweging van het deeltje steeds in een vlak door O geschiedt en bewijs dat de voerstraal in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten beschrijft (= wet der perken).

(iii) Toon aan dat $\mathbf{R}$ een vector is die in het baanvlak gelegen is. Definieer vervolgens de constante e via de relatie $||\mathbf{R}|| = ke$ en bepaal de vergelijking van de baan in poolcoordinaten.

T2. Zij Ω een star lichaam, met massadichtheid ρ, dat onderworpen is aan een krachtenstelsel bestaande uit n_1 krachten $\mathbf{F}_i(t)$ aangrijpend in punten $\mathbf{x}_i(t)$ van Ω $(i = 1, \ldots, n_1)$, en n_2 krachtvelden met dichtheid $\mathbf{f}_j(t)$, $(j = 1, \ldots, n_2)$.

(i) Geef de definitie van de resulterende kracht $\mathbf{F}(t)$, het resulterend moment $\mathbf{M}_C(t)$ om het massamiddelpunt C en het resulterend vermogen $\mathcal{P}$ van het gegeven krachtenstelsel.

(ii) Toon aan dat $\mathcal{P}(t) = \mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{v}_C(t) + \mathbf{M}_C(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t)$ waarbij je mag steunen op de uitdrukking voor de snelheid van een generiek punt van Ω (nl. $\dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{v}_C(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}'(t, \mathbf{y})$, met $\mathbf{v}_C(t)$ de snelheid van C en $\mathbf{x}'(t, \mathbf{y})$ de plaatsvector van een punt t.o.v. C).

(iii) Vertrekkend van de algemene uitdrukking $T = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\mathbf{y})\dot{x}^2(t, \mathbf{y})dv$ voor de kinetische energie van Ω, bewijs dat we dit nog kunnen schrijven als $T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\mathbf{L}_C(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t)$.

---

1) Niet vergeten: OP ELK BLAD UW NAAM VERMELDEN!!

2) Theorie en oefeningen moeten APART afgegeven worden.

Oefeningen

O1. Een deeltje met massa m glijdt onder invloed van de zwaartekracht in een *ruwe* halfcirkelvormige gleuf, gelegen in een vast verticaal vlak, met straal a en horizontale middellijn AB. De kinematische wrijvingscoëfficient is $\mu = 1/2$. Het deeltje vertrekt vanuit A met een zekere beginsnelheid $\mathbf{v}_0$, verticaal naar beneden gericht (rakend aan de gleuf). Indien $v_0 (= \|\mathbf{v}_0\|)$ voldoende groot is, verlaat het deeltje de gleuf in B met een verticaal opwaarts gerichte snelheid.

(i) Bepaal de grootte van de snelheid waarmee het deeltje in B toekomt.

(ii) Toon aan dat het deeltje een maximale hoogte a boven B bereikt indien

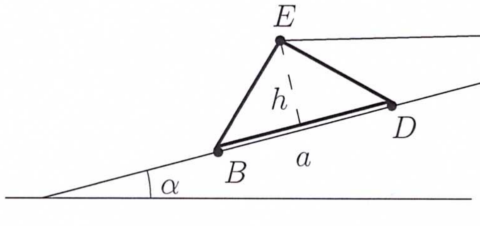
$$v_0^2 = \frac{ag}{2}(3 + 7e^{\pi}).$$

O2. Een vlakke homogene plaat BDE met massa m heeft de vorm van een gelijkbenige driehoek, met $|BE| = |DE|$. De basis BD van de driehoek heeft lengte a en de hoogte h vanuit de top E bedraagt $(9/10)a$. De plaat die onderworpen is aan de zwaartekracht, bevindt zich in een vast verticaal vlak en steunt *met de hoekpunten* B en D op een hellende rechte die een hoek α insluit met de horizontale. *De bindingen in B en D worden glad verondersteld.* De plaat wordt in evenwicht gehouden door een onuitrekbaar touw EF, met F een punt op de helling, op een afstand $4a$ van D (zie figuur). De kracht die het touw daarbij uitoefent op de plaat noteren we met $\mathbf{S}$ en is gericht langs het touw.

(i) Bepaal bij deze evenwichtsstand de grootte van de reactiekrachten in B en D en de grootte $S = \|\mathbf{S}\|$ van de spankracht van het touw in functie van het gewicht $W = mg$ van de plaat en van de hellingshoek α.

(ii) Het evenwicht wordt verbroken wanneer hetzij één van de reactiekrachten verdwijnt, hetzij S een maximale waarde overschreidt. Indien die maximale spankracht (= kracht waarbij het touw breekt) $(\sqrt{78}/10)W$ bedraagt, bepaal dan de bovengrens α_0 voor de hellingshoek zodat er slechts evenwicht mogelijk is voor $0 \leq \alpha < \alpha_0$.

(OPM. De afstand van het massamiddelpunt van de plaat tot de basis bedraagt $h/3$.)



↳ v_0 raakt aan gleuf