Oefeningen Analyse IV

1. Verklaar uitvoerig waarom de aangeduide stappen in de volgende redenering (niet) juist zijn:

   Lemma. *Als X en Y samenhangende topologische ruimten zijn, dan is ook $X \times Y$ samenhangend (voor de producttopologie).*

   Bewijs. Kies willekeurig $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Dan zijn $\underline{\{x_0\} \times Y}$ [1] en $X \times \{y_0\}$ samenhangend. Bijgevolg is ook $(\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$ samenhangend. Er volgt dat ook $\bigcup_{y \in Y} (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ samenhangend is. [2] [3] □

   Stelling. *Als X_i samenhangende topologische ruimten zijn voor elke $i \in I$ (I een willekeurige indexverzameling), dan is ook $\prod_{i \in I} X_i$ samenhangend (voor de producttopologie).*

   Bewijs. Per inductie volgt uit het lemma dat $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}$ samenhangend zijn, voor elk eindig aantal $i_1, \ldots, i_n \in I$. Kies nu willekeurig $x_0 = (x_{0,i})_{i \in I} \in X := \prod_{i \in I} X_i$. Dan is $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}$ homeomorf met $\{(x_i)_{i \in I} \in X : x_i = x_{0,i} \text{ voor elke } i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}\}$. Bijgevolg is ook

   $$Y := \{(x_i)_{i \in I} \in X : \text{er zijn slechts eindig veel } i \in I \text{ waarvoor } x_i \neq x_{0,i}\}$$

   samenhangend. [4] Verder is Y ook dicht in X. [5] Daaruit volgt dat X ook samenhangend is. [6] □

   [1] Toon aan dat uit de gegevens volgt dat $\{x_0\} \times Y$ samenhangend is.
   Omdat Y samenhangend is en omdat samenhangendheid een continue invariant is, is ook het beeld van Y onder de continue afbeelding $f\colon Y \to \{x_0\} \times Y\colon f(y) := (x_0, y)$ samenhangend. (f is continu omdat beide componenten $f_1\colon Y \to \{x_0\}\colon f_1(y) = x_0$ en $f_2\colon Y \to Y\colon f_2(y) = y$ continu zijn.)

   [2] Waarom is $\bigcup_{y \in Y} (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ samenhangend?
   We toonden net aan dat $(\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ samenhangend is voor een willekeurige $y \in Y$. Omdat $\bigcap_{y \in Y} (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y\}) \supseteq \{x_0\} \times Y \neq \varnothing$, is dan ook $\bigcup_{y \in Y} (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ samenhangend.

   [3] Hoe volgt het gevraagde hieruit?
   $X \times Y = \bigcup_{y \in Y} (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$.

   [4] Waarom is Y samenhangend?
   $Y = \bigcup_{I_0 \subseteq I \text{ eindig}} \{(x_i)_{i \in I} \in X : x_i = x_{0,i} \text{ voor elke } i \in I \setminus I_0\}$. *Elk van de verzamelingen $\{(x_i)_{i \in I} \in X : x_i = x_{0,i}$ voor elke $i \in I \setminus I_0\}$ is samenhangend (want homeomorf met een samenhangende ruimte), en $\bigcap_{I_0 \subseteq I \text{ eindig}} \{(x_i)_{i \in I} \in X : x_i = x_{0,i}$ voor elke $i \in I \setminus I_0\} \supseteq \{x_0\} \neq \varnothing$.*

   [5] Toon aan dat Y dicht is in X.
   We tonen aan dat een willekeurige open $U \neq \varnothing$ in X een punt met Y gemeen heeft. Z.v.v.a. is U een element van een gegeven basis voor τ_X. Door de definitie van τ_X is dus z.v.v.a. $U = \mathrm{pr}^{-1}(V_{i_1}) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}^{-1}(V_{i_N})$ voor zekere open V_{i_j} in X_{i_j} ($j = 1, \ldots, N$). M.a.w., $U = \{(x_i)_i : x_{i_1} \in V_{i_1} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_N} \in V_{i_N}\}$. U bevat elementen die maar in eindig veel coördinaten van x_0 verschillen, want elke $(x_i)_i$ met $\begin{cases} x_i \in V_i & i \in \{i_1, \ldots, i_N\} \\ x_i = x_{i,0} & \text{anders} \end{cases}$ voldoet. ($V_i \neq \varnothing$, want $U \neq \varnothing$.)

   [6] Waarom volgt dat X samenhangend is?
   Als Y samenhangend is en $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$, dan is ook Z samenhangend. Dit geldt i.h.b. voor $Z = X$, want $\overline{Y} = X$.

2. Zij τ de topologie van de eindige complementen op een oneindige verzameling X. Toon aan dat (X, τ) niet Hausdorff is.
   Zij $x, y \in X$. Als (X, τ) Hausdorff is, dan bestaan $U, V \in \tau_X$, $x \in U$, $y \in V$ en $U \cap V = \varnothing$. Omdat $U, V \in \tau_X \setminus \{\varnothing\}$, zijn $X \setminus U$ en $X \setminus V$ eindig, zodat ook de unie $X \setminus (U \cap V) = X$ eindig is, in strijd met het gegeven.

3. Geef een voorbeeld van een topologische ruimte X en een continue afbeelding $f\colon X \to X$ die niet open is. (Een afbeelding is open als ze open verzamelingen afbeeldt op open verzamelingen.)
$X := \mathbb{R}$ (met de gewone topologie), $f(x) := 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$. (f is niet open, want $\mathbb{R}$ is open in $\mathbb{R}$, maar $f(\mathbb{R}) = \{0\}$ is niet open in $\mathbb{R}$.)

4. Zij X een topologische ruimte en f een continue afbeelding $X \to \mathbb{R}$. Zij $V \subseteq X$. Toon aan dat $\sup_{x\in V} f(x) = \sup_{x\in\overline{V}} f(x)$.
$\leqslant$: omdat $V \subseteq \overline{V}$.
$\geqslant$: zij $x \in \overline{V}$ willekeurig. Het volstaat aan te tonen dat $f(x) \leqslant \sup_{x\in V} f(x)$.
Elke omgeving van x heeft een punt met V gemeen. Omdat f continu is, is $f^{-1}(U)$ een omgeving van x voor elke omgeving U van $f(x)$ in $\mathbb{R}$. Kiezen we $\varepsilon > 0$ willekeurig en $U =]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$, dan volgt dus dat $\{y \in X : |f(y) - f(x)| < \varepsilon\} \cap V \neq \varnothing$, m.a.w., er bestaat $y \in V$ waarvoor $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Maar dan is $f(x) \leqslant f(y) + \varepsilon \leqslant \sup_{x\in V} f(x) + \varepsilon$. Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is, volgt het gevraagde.

5. Zij X een compacte Hausdorff-ruimte.
   (a) Toon aan dat X regulier is.
   (b) Als F_1 en F_2 twee disjuncte gesloten deelverzamelingen van X zijn, toon dan aan dat disjuncte open deelverzamelingen U en V van X bestaan waarvoor $F_1 \subseteq U$ en $F_2 \subseteq V$.

   We gaan analoog te werk als in het bewijs van de stelling dat een compacte deelruimte van een Hausdorff-ruimte gesloten is.
   (a) Kies willekeurig een gesloten $F \subseteq X$ en $x \in X \setminus F$. Omdat X Hausdorff is, bestaan voor elke $y \in F$ disjuncte open verzamelingen $U_y \ni x$ en $V_y \ni y$. Omdat F een gesloten deelruimte is van een compacte ruimte, is F zelf compact. Verder is $F \subseteq \bigcup_{y\in F} V_y$, zodat er een eindige deelbedekking $F \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n} =: V$ is. Dan is $U := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ een omgeving van x. Bovendien is $U \cap V = \varnothing$, want voor elke k is $U \cap V_{y_k} \subseteq U_{y_k} \cap V_{y_k} = \varnothing$, zodat ook $U \cap V = U \cap (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}) = \varnothing$.
   (b) Omdat X regulier is, bestaan voor elke $y \in F_2$ disjuncte open verzamelingen $U_y \supseteq F_1$ en $V_y \ni y$. Omdat F_2 zelf compact is en $F_2 \subseteq \bigcup_{y\in F_2} V_y$, is er een eindige deelbedekking $F_2 \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n} =: V$. Dan is $U := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ open en $F_1 \subseteq U$. Zoals in deel (a) is $U \cap V = \varnothing$.

6. Zij X, Y genormeerde ruimten.
   (a) Zij $a, b \in X$. Toon aan dat het lijnstuk $[a, b] \subseteq X$ samenhangend en compact is.
   $[a, b]$ is het beeld van de samenhangende en compacte verzameling $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ onder de continue afbeelding $\varphi(t) = a+t(b-a)$. Het gevraagde volgt dus omdat samenhangendheid en compactheid continue invarianten zijn. (φ is continu omdat de vectorbewerkingen continu zijn.)
   (b) Zij $f\colon X \to Y$ lokaal Lipschitz in heel X, met *dezelfde* Lipschitz-constante c, d.w.z. voor zekere $c \in \mathbb{R}$, $c \geqslant 0$ geldt

$$(\forall x \in X)(\exists r > 0)(\forall x' \in B_X(x, r))(\|f(x') - f(x)\| \leqslant c\|x' - x\|).$$

   Toon aan dat f dan globaal Lipschitz is met Lipschitz-constante c, d.w.z. dat

$$(\forall x, x' \in X)(\|f(x') - f(x)\| \leqslant c\|x' - x\|).$$

   HINT: gebruik deel (a).
   Lemma: Als $x \in [a, b] \subseteq X$, dan is $\|a - x\| + \|x - b\| = \|a - b\|$.
   Als $a = 0$, dan is $x = tb$ voor zekere $t \in [0, 1]$. De gezochte gelijkheid geldt dan omdat $\|tb\| + \|(1 - t)b\| = t\,\|b\| + (1 - t)\,\|b\| = \|b\|$. Omdat de afstand op X translatie-invariant is ($d(x, y) = d(x + a, y + a) = \|x - y\|$), geldt dit ook als $a \neq 0$.
   OPLOSSING 1 (VIA SAMENHANG): *Kies $a, b \in X$ ($a \neq b$). We tonen de gezochte ongelijkheid aan op het lijnstuk $[a, b]$. Noem*

$$U := \{x \in [a, b] : (\forall y \in [a, x])(\|f(y) - f(a)\| \leqslant c\,\|y - a\|)\}.$$

(a) U is gesloten in $[a,b]$: als $x \in \overline{U}$, dan bestaan $x_n \in U$, $x_n \to x \in [a,b]$. Zij nu $y \in [a,x]$. Is $y \in [a,x_n]$ voor zekere n, dan is $\|f(y)-f(a)\| \leqslant c\,\|y-a\|$ omdat $x_n \in U$. Blijft het geval dat $x_n \in [a,y]$ voor elke n. Dan is $\|y-x\| \leqslant \|x_n - x\| \to 0$, zodat $y = x$ en de ongelijkheid geldt door limiet-overgang $n \to \infty$ en door het rijenkenmerk (zowel f als $\|.\|$ zijn continu).
(b) U is ook open in $[a,b]$: kies $x \in U$. Door het gegeven bestaat $\delta > 0$ zo dat $\|f(y)-f(x)\| \leqslant c\,\|y-x\|$ voor elke $y \in B(x,\delta)$. Omdat $x \in U$, is dan voor elke $y \in B(x,\delta) \cap [a,b]$

$$\|f(y)-f(a)\| \leqslant \|f(y)-f(x)\| + \|f(x)-f(a)\| \leqslant c(\|y-x\| + \|x-a\|) = c\,\|y-a\|$$

als $x \in [a,y]$. Als $y \in [a,x]$, dan geldt dezelfde ongelijkheid bij definitie van U.
(c) Omdat $[a,b]$ samenhangend is en ook $a \in U$, moet $[a,b] = U$.
Oplossing 2 (via rijcompactheid): *Uit het ongerijme: veronderstel dat $\|f(x_1)-f(x_0)\| > c\,\|x_1 - x_0\|$ voor zekere $x_0, x_1 \in X$. Noem $x_{1/2} := (x_0+x_1)/2$. Omdat*

$$\|f(x_0)-f(x_{1/2})\| \leqslant c\|x_0 - x_{1/2}\| \text{ en } \|f(x_1)-f(x_{1/2})\| \leqslant c\|x_1 - x_{1/2}\|$$

zou impliceren dat

$$\|f(x_1)-f(x_0)\| \leqslant c(\left\|x_1 - x_{1/2}\right\| + \left\|x_{1/2} - x_0\right\|) = c\,\|x_1 - x_0\|\,,$$

geldt een van de ongelijkheden niet. Enz., construeer rijen $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ in $[x_0,x_1]$ met $\|y_n - z_n\| \leqslant 1/2^n$, $[y_{n+1}, z_{n+1}] \subseteq [y_n, z_n]$ en

$$\|f(y_n)-f(z_n)\| > c\|y_n - z_n\|.$$

Omdat $[x_0,x_1]$ compact is, bestaat een deelrij die convergeert naar zekere $u \in [x_0,x_1]$ (met $u \in [y_n,z_n]$ voor elke n). Door de lokale Lipschitz-voorwaarde in u is

$$\|f(y_n)-f(z_n)\| \leqslant c(\|y_n - u\| + \|u - z_n\|) = c\,\|y_n - z_n\|$$

voor voldoende grote n, een strijdigheid.
Oplossing 3 (via compactheid): *Kies $a, b \in X$ ($a \neq b$). We tonen de gezochte ongelijkheid aan voor de punten a, b. Noem r_x de gegeven r uit de lokale Lipschitz-voorwaarde die hoort bij $x \in X$. Dan is $[a,b] \subseteq \bigcup_{x\in[a,b]} B(x,r_x)$, zodat $[a,b] \subseteq B(x_1,r_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_N, r_{x_N})$ omdat $[a,b]$ compact is (zekere N). Noteer $x \leqslant y$ als $x \in [a,y]$. Orden x_j zo dat $x_1 < \cdots < x_N$. Z.v.v.a. is ook $B(x_j,r_{x_j}) \not\subseteq B(x_k,r_{x_k})$ als $j \neq k$ (anders kunnen we $B(x_j,r_{x_j})$ gewoon weglaten). Dan hebben $B(x_j,r_{x_j})$ en $B(x_{j+1},r_{x_{j+1}})$ een punt $y_j \in [a,b]$ gemeen. (Zoniet is $[a,b] = [a,b] \cap \left(\bigcup_{k\leqslant j} B(x_k,r_{x_k}) \sqcup \bigcup_{k>j} B(x_k,r_{x_k})\right)$, in strijd met samenhang.) Dan is*

$$\begin{aligned}\|f(b)-f(a)\| &\leqslant \|f(b)-f(x_N)\| + \|f(x_N)-f(y_{N-1})\| + \cdots + \|f(x_1)-f(a)\| \\ &\leqslant c(\|b-x_N\| + \|x_N - y_{N-1}\| + \cdots + \|x_1 - a\|) = c\,\|b-a\|\,.\end{aligned}$$