Examen *Statistiek en Gegevensverwerking*
2de Bachelor Fysica en Sterrenkunde

Eerste zittijd 2011-2012

Theorie

1. Bepaal het algoritme om richtingen isotroop verdeeld over de ruimte te genereren in een Monte Carlo toepassing. (2pt)

2. Hoe leidt je de Poisson-verdeling af uit de binomiaal-verdeling? Bewijs ook dat voor de Poisson-verdeling de verwachtingswaarde en de variantie gelijk zijn aan elkaar. (3pt)

3. We ontmoetten twee formules voor de schatter van de variantie van een steekproef:

$$\begin{aligned} \widehat{V(x)} &= \frac{1}{N}\sum(x_i-\mu)^2 \\ \widehat{V(x)} &= \frac{1}{N-1}\sum(x_i-\bar{x})^2 \end{aligned}$$

   Wat is het verschil tussen deze twee? Wanneer gebruik je de ene, en wanneer de andere? Bewijs dat ze allebei onbevooroordeeld zijn.
   (2pt)

4. In de kleinste kwadraten methode om een rechte $y = mx + c$ te fitten, bekwamen we als formules voor $\hat{m}$ en $\hat{c}$:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \frac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} \\ \hat{c} &= \frac{\overline{x^2}\bar{y}-\bar{x}\overline{xy}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} \end{aligned}$$

   Leidt hieruit de formules voor de variantie van deze grootheden af.
   (2pt)

Oefeningen

1. In een experiment om een hypothetisch deeltje, het statiston (het kwantum van juist gebruik van statistiek, dus uiterst zeldzaam), te ontdekken wordt een reeks metingen gedaan met een apparaat. Er worden 20 metingen van telkens 1 minuut gedaan, waarbij afwisselend de condities toelaten om het statiston te zien (+ achtergrond), of niet (enkel achtergrond). In onderstaande tabel geeft de bovenste rij telkens de opeenvolgende metingen statiston+achtergrond, de onderste rij de tussenliggende achtergrondmetingen.

14	16	11	16	17	16	19	18	12	15
14	9	16	11	13	10	14	13	12	13

Met welke confidentie kunnen we hieruit al dan niet afleiden of het statiston bestaat? (3pt)

2. De Pareto-verdeling is genoemd naar de Italiaanse econoom Vilfredo Pareto (bekend van het Pareto-principe: 80% van de rijkdom is in handen van 20% van de mensen), en wordt gebruikt in theorieën over welvaartsverdeling.

$$f(x; a, b) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}$$

De distributie loopt tot $+\infty$.

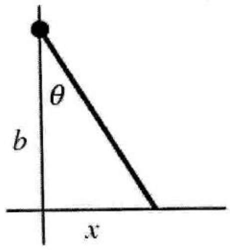
(a) Wat is de ondergrens?

(b) Wat is de verwachtingswaarde $< x >$?

(c) Stel een algoritme op om toevalsgetallen volgens deze verdeling te genereren.

(3pt)

3. De hoek θ in onderstaande figuur is uniform verdeeld tussen $-\pi/2$ en $+\pi/2$. Wat is de verdeling van de lengte van het lijnstuk x? Geef (en bewijs) de interpretatie van de parameter b in deze verdeling. (Stelt het de mediaan, het eerste kwartiel, ... voor?)



(3pt)

4. Gisteren, 19 januari 2012, werden om 12u de volgende windsnelheden (in km/h) gemeten:

Buzenol	Chièvres	Florennes	Kleine Brogel	Melle	Middelkerke	St-Hubert	Ukkel
24	32	43	25	32	14	22	24

De windsnelheid in Florennes valt onmiddellijk op. Wat is de kans dat je een dergelijk hoge windsnelheid meet, zeker wetende dat alle plaatsen hier relatief dicht bijeen liggen? (2pt)

Examen *Statistiek en Gegevensverwerking*
2de Bachelor Fysica en Sterrenkunde

Formularium

- Exponentiële verdeling
$$P(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$
- χ^2-verdeling
$$P(\chi^2;n) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}\chi^{2(n/2-1)}e^{-\chi^2/2}$$
- Binomiaal-verdeling
$$P(r;p,n) = p^r(1-p)^{n-r}\frac{n!}{r!(n-r)!}$$
- Gamma-functie
$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty u^x e^{-u}du\\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x)\\ \Gamma(x+1) &= x!\\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}\\ \Gamma(p) &= a^p\int_0^\infty z^{p-1}e^{-az}dz\end{aligned}$$
- Een handige afgeleide:
$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}dz = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a} \qquad \int_{0}^{+\infty} ze^{-z^2/2}dz = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} z^2e^{-z^2/2}dz = \sqrt{2\pi}$$

Hogere machten kunnen bekomen worden door af te leiden naar a:

$$\int_{0}^{+\infty} x^{2n+1}e^{-ax^2}dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \qquad \int_{0}^{+\infty} z^{2n+1}e^{-z^2/2}dz = 2^n n!$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^{2n}e^{-z^2/2}dz = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{2\pi}$$

Voor een oneven macht wordt de symmetrische integraal identiek 0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}e^{-ax^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} z^{2n+1}e^{-z^2/2}dz = 0$$

Tabel 1: Handige integralen