1. (a) Zij U een samenhangende deelverzameling van een topologische ruimte X. Als $U \subseteq U' \subseteq \overline{U}$, toon aan dat dan ook U' samenhangend is.
   (b) Bepaal de samenhangende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

2. Zij M, M' metrische ruimten en V een dichte deelverzameling van M. Zij f een gelijkmatig continue afbeelding $V \to M'$. Als M' compleet is, toon dan aan dat een unieke uitbreiding van f bestaat tot een (gelijkmatig) continue afbeelding f: $M \to M'$.

3. Beantwoord de vragen:

Stelling 1. *Zij f een continue functie $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ waarvoor de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ bestaan en continu zijn ($j = 1, \ldots, m$) in een omgeving in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ van $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Als $f(a, b) = 0$ en $\det D_2 f(a, b) \neq 0$, dan bestaat een omgeving $U \times V$ van (a, b) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ zo dat voor elke $x \in U$ een unieke $g(x) \in V$ bestaat waarvoor*

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Bovendien is de afbeelding g: $U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continu.

Bewijs. D.m.v. een translatie mogen we aannemen dat $(a, b) = (0, 0)$.
Omdat $\det D_2 f(0, 0) \neq 0$ [1], bestaat $(D_2 f(0, 0))^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. We bekijken de afbeelding

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : F(x, y) := y - (D_2 f(0, 0))^{-1}(f(x, y)).$$

Door de gegevens is F continu in een omgeving van $(0, 0)$. We gaan na of aan de gelijkmatige contractie-ongelijkheid voldaan is. Omdat

$$D_2 F(x, y) \overset{[2]}{=} \mathrm{id} - (D_2 f(0, 0))^{-1} \circ D_2 f(x, y) = (D_2 f(0, 0))^{-1} \circ (D_2 f(0, 0) - D_2 f(x, y))$$

(hierbij is id de identieke afbeelding) is

$$\begin{aligned} \|F(x, y_2) - F(x, y_1)\| &\overset{[3]}{\leq} \sup_{y \in [y_1, y_2]} \|D_2 F(x, y)\| \|y_2 - y_1\| \\ &\overset{[4]}{\leq} \|(D_2 f(0, 0))^{-1}\| \sup_{y \in [y_1, y_2]} \|D_2 f(0, 0) - D_2 f(x, y)\| \|y_2 - y_1\|. \end{aligned}$$

Omdat $D_2 f$ continu is in $(0, 0)$, bestaat $\delta > 0$ zo dat $\|D_2 f(0, 0) - D_2 f(x, y)\| \leq \frac{1}{2\|(D_2 f(0,0))^{-1}\|}$ zodra $\|x\| \leq \delta$ en $\|y\| \leq \delta$, [5] zodat

$$\|F(x, y_2) - F(x, y_1)\| \leq \tfrac{1}{2}\|y_2 - y_1\|, \text{ zodra } \|x\| \leq \delta, \ \|y_1\| \leq \delta, \ \|y_2\| \leq \delta.$$

We tonen nu aan dat $F(x, y) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \delta)$ als $y \in \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \delta)$, vermits de contractie-ongelijkheid enkel geldt voor $y \in \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \delta)$. Hiertoe merken we op dat voor $\|x\| \leq \delta$ en $\|y\| \leq \delta$,

$$\|F(x, y)\| \leq \|F(x, y) - F(x, 0)\| + \|F(x, 0)\| \leq \tfrac{1}{2}\|y\| + \|F(x, 0)\|.$$

Omdat $F(0, 0) = 0$ en F continu is in $(0, 0)$, bestaat $\delta' \leq \delta$ zo dat $\|F(x, 0)\| \leq \delta/2$, zodra $\|x\| \leq \delta'$, zodat $\|F(x, y)\| \leq \delta$, zodra $\|x\| \leq \delta'$ en $\|y\| \leq \delta$. We passen nu … [6] toe op de (gerestringeerde) afbeelding

$$F : \ \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, \delta') \times \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \delta) \longrightarrow \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \delta),$$

en vinden zo voor elke $x \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, \delta')$ een unieke $g(x) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \delta)$ waarvoor $F(x, g(x)) = g(x)$, d.w.z., waarvoor $f(x, g(x)) = 0$. Ook is g: $\overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, \delta') \longrightarrow \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \delta)$ continu. □

[1] Schrijf in coördinaten: $D_2 f(0, 0)$.
[2,3,4] Verklaar de (on)gelijkheid.
[5] Leg uit waarom een $\delta > 0$ met deze eigenschap bestaat.
[6] Welke stelling wordt hier toegepast? Ga ook na dat hier aan de voorwaarden voldaan is om haar toe te passen.