Oefeningen Analyse IV

1. Verklaar uitvoerig waarom de aangeduide stappen in de volgende redenering (niet) juist zijn:

 Lemma. *Als X en Y samenhangende topologische ruimten zijn, dan is ook $X \times Y$ samenhangend (voor de producttopologie).*

 Bewijs. Kies willekeurig $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Dan zijn $\{x_0\} \times Y$[1] en $X \times \{y_0\}$ samenhangend. Bijgevolg is ook $(\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$ samenhangend. Er volgt dat ook $\bigcup_{y \in Y} (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ samenhangend is.[2] [3] $\square$

 Stelling. *Als X_i samenhangende topologische ruimten zijn voor elke $i \in I$ (I een willekeurige indexverzameling), dan is ook $\prod_{i \in I} X_i$ samenhangend (voor de producttopologie).*

 Bewijs. Per inductie volgt uit het lemma dat $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}$ samenhangend zijn, voor elk eindig aantal $i_1, \ldots, i_n \in I$. Kies nu willekeurig $x_0 = (x_{0,i})_{i \in I} \in X := \prod_{i \in I} X_i$. Dan is $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}$ homeomorf met $\{(x_i)_{i \in I} \in X : x_i = x_{0,i} \text{ voor elke } i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}\}$. Bijgevolg is ook

 $$Y := \{(x_i)_{i \in I} \in X : \text{er zijn slechts eindig veel } i \in I \text{ waarvoor } x_i \neq x_{0,i}\}$$

 samenhangend.[4] Verder is Y ook dicht in X.[5] Daaruit volgt dat X ook samenhangend is.[6] $\square$

 [1] Toon aan dat uit de gegevens volgt dat $\{x_0\} \times Y$ samenhangend is.
 [2] Waarom is $\bigcup_{y \in Y} (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ samenhangend?
 [3] Hoe volgt het gevraagde hieruit?
 [4] Waarom is Y samenhangend?
 [5] Toon aan dat Y dicht is in X.
 [6] Waarom volgt dat X samenhangend is?

√ 2. Zij τ de topologie van de eindige complementen op een oneindige verzameling X. Toon aan dat (X, τ) niet Hausdorff is.

√ 3. Geef een voorbeeld van een topologische ruimte X en een continue afbeelding $f \colon X \to X$ die niet open is. (Een afbeelding is open als ze open verzamelingen op open verzamelingen afbeeldt.)

√ 4. Zij X een topologische ruimte en f een continue afbeelding $X \to \mathbb{R}$. Zij $V \subseteq X$. Toon aan dat $\sup_{x \in V} f(x) = \sup_{x \in \overline{V}} f(x)$.

5. Zij X een compacte Hausdorff-ruimte.

 √ (a) Toon aan dat X regulier is.

 √ (b) Als F_1 en F_2 twee disjuncte gesloten deelverzamelingen van X zijn, toon dan aan dat disjuncte open deelverzamelingen U_1 en U_2 van X bestaan waarvoor $F_1 \subseteq U_1$ en $F_2 \subseteq U_2$.

6. Zij X, Y genormeerde ruimten.

 (a) Zij $a, b \in X$. Toon aan dat het lijnstuk $[a, b] \subseteq X$ samenhangend en compact is.

 (b) Zij $f \colon X \to Y$ lokaal Lipschitz in heel X, met *dezelfde* Lipschitz-constante c, d.w.z. voor zekere $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ geldt

 $$(\forall x \in X)(\exists r > 0)(\forall x' \in B_X(x, r))(\|f(x') - f(x)\| \leq c\|x' - x\|).$$

 Toon aan dat f dan globaal Lipschitz is met Lipschitz-constante c, d.w.z. dat

 $$(\forall x, x' \in X)(\|f(x') - f(x)\| \leq c\|x' - x\|).$$

 HINT: gebruik deel (a). Bekijk bijv. eerst het concrete geval $X = Y = \mathbb{R}$ om de gedachten te vestigen.