Examen oefeningen Wiskundige analyse III
24 Januari 2013

Oefening 1. Zij $f(z) = 2ize^{(1+i)z^2+2i}$. Bereken $\max_{z\in B(0,2)} |f(z)|$.

Oefening 2. Pas het bewijs van het Lemma van Schwartz(pagina 68 in de cursus) aan om volgende stelling te bewijzen.

Zij f holomorf in $B(0,R)$, $R > 1$, met $f(i) = 0$ en $f(-i) = 0$. Verder is $|f(z)| \leq M$ voor elke $z \in B(0,R)$. Bewijs dat

$$|f(z)| \leq \frac{|z^2-1|M}{R^2-1}, \forall z \in B(0,R).$$

Als gelijkheid zich voordoet voor zekere $z \in B(0,R) \setminus \{-i, i\}$, dan is f de samenstelling van de functie $z \mapsto \frac{(z^2-1)M}{R^2-1}$, en een rotatie rond 0.

Oefening 3. Het doel van deze oefening is om de reële integraal

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2(x^2+a^2)} dx, \qquad m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

te berekenen.

1. Bewijs de identiteit
$$\sin^2(mz) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(1 - e^{2miz}\right),$$
voor alle $z \in \mathbb{R}$.

2. We zullen $f(z) = \dfrac{(1-e^{2miz})}{z^2(z^2+a^2)}$ over een gepaste contour Γ integreren. We stellen Γ gelijk aan het lijnstuk $[-R, R]$ gevolgd door de bovenste helft van de cirkel met straal R. Verklaar waarom dit een goede keuze is.

3. Bereken $\int_\Gamma f(z)dz$ over de hierboven beschreven contour aan de hand van de residustelling, en leid hieruit de waarde van I af.

Oefening 4. Zij f een functie meromorf op heel $\mathbb{C}$ met enkel singulariteiten in de punten 1 en i. In 1 bezit ze een pool van orde 5, en in i een pool van orde 6. Het is gegeven dat in $B(0, 1/2)$ geldt dat $f(z) = g(z)^{11}$, waar g een holomorfe functie is op $B(0, 1/2)$, en $g(0) = 0$. Ook weet je dat $\lim_{z\to\infty} f(z) = 2$.

1. Bewijs dat f een rationale functie is.

2. Bepaal f expliciet.

Oefening 5. Zij $f(z) = \frac{e^{1/z}}{(z-1)(z-2)}$. Bepaal de singulariteiten van deze functie en bereken hun residu's.