Relaties en Structuren: oefeningen

Eerste Bachelor Wiskunde

Jan De Beule – Bert Seghers

30 januari 2013, 8:30

1. Bewijs dat $m > 1$ een priemgetal is *als en slechts* als m een deler is van $(m-1)! + 1$.

2. Toon aan dat als $m \geq n$,
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k!\, S(m,k) = n^m$$

3.
   - Toon aan dat $f(x) = x^3 - x + 1$ een irreducibel polynoom is over $\mathbb{F}_3$.
   - Construeer met dit primitief polynoom het eindig veld $\mathbb{F}_{27}$ (gebruik s voor een nulpunt van f) en stel de Zech-log-tabel op.
   - Hoeveel veldelementen zijn primitieve elementen? Welke zijn deze?
   - Los de derdegraadsvergelijking $X^3 + (s^2 - s)X^2 + (-s^2 + 1)X = 0$ op over deze $\mathbb{F}_{27}$.

4. Hoeveel oplossingen heeft onderstaande congruentie in $\mathbb{N}[0, 259]$? Bepaal het kleinste natuurlijk getal dat voldoet aan
$$x^4 \equiv 196 \pmod{260}.$$

5. Een *kolom* bestaat uit 4 punten onder elkaar. Een punt kan wit, zwart of oranje zijn. We noemen een kolom *overheersend zwart* als hij minstens 2 zwarte punten bevat, en analoog voor de andere kleuren.

   (a)
   - Op hoeveel manieren kan een kolom gekleurd zijn?
   - Hoeveel kolommen zijn overheersend wit?
   - Hoeveel kolommen zijn tegelijk overheersend wit en overheersend oranje?
   - Hoeveel kolommen bevatten alledrie de kleuren?

   (b) We zetten 19 kolommen in een cirkel, zodat we een cilinder van vier punten hoog krijgen. Toon aan dat er altijd een *rechthoek* met gelijkgekleurde hoekpunten kan gevonden worden. Hint: gebruik (en toon aan) dat elke kolom (minstens) een overheersende kleur heeft.

   (★) [Bonus] Hoeveel verschillende cilinders kan men maken? (+ bewijs)