

Relaties en Structuren: oefeningen

Eerste Bachelor Wiskunde

Frank De Clerck – Bert Seghers

31 januari 2012, 8:30

1. Geef van de drie uitspraken over de Eulertotiëntfunctie hieronder aan of ze waar of vals zijn. Indien waar, bewijs. Indien vals, geef een tegenvoorbeeld.

(a) $(\forall n > 0) (\Phi(n) = n - 1 \iff n \text{ is een priemgetal})$

(b) $(\forall n > 2) (\Phi(n) \text{ is even})$

(c) $\text{ggd}(\Phi(a), \Phi(b)) = \Phi(\text{ggd}(a, b))$

2. Los het volgende stelsel met lineaire en kwadratische congruenties over \mathbb{Z} op.

$$\begin{cases} 5x \equiv 7 & (\text{mod } 12) \\ 6x \equiv 15 & (\text{mod } 21) \\ x^2 \equiv 9 & (\text{mod } 20) \end{cases}$$

3. (a) Toon aan dat in elke verzameling van 7 natuurlijke getallen, er steeds twee kunnen gevonden worden wiens kwadraten eindigen op hetzelfde cijfer.

(b) Toon aan dat in elke verzameling van 52 natuurlijke getallen, er steeds twee kunnen gevonden worden wiens kwadraten eindigen op dezelfde twee cijfers.

(*) (Voor bonuspunten) De grens van 52 uit (b) is een grove overschatting. Door welk getal moeten we 52 vervangen, zodat de grens scherp is? Geef een redenering, niet zomaar tellen.

4. Bewijs: als $\text{ggd}(k, q - 1) = 1$, dan is elk element in \mathbb{F}_q een k -de macht.

5. Hoeveel relaties op een verzameling met n elementen zijn tegelijk reflexief, niet-transitief en symmetrisch? Antwoord met een uitrekenbare uitdrukking, die wel nog eindige sommaties, producten, faculteiten, binomiaalcoëfficiënten, multinomiaalgetallen en/of Stirlinggetallen mag bevatten. Verklaar in detail hoe je eraan komt.