Eerste Bachelor Wiskunde
Oefeningen Relaties en Structuren
Frank De Clerck – Jan De Beule
26 augustus 2010

1. Bewijs dat

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

2. Noteer F_i voor het i^{de} Fibonacci getal, i.e.

$$F_i = \begin{cases} 1 & i \in \{1,2\} \\ F_{i-1} + F_{i-2} & i > 2 \end{cases}$$

   Bereken $\text{ggd}(F_{i+1}, F_i)$ voor alle $i > 0$.

3. Stel $p > 2$ is een priemgetal. Bewijs dat $x^2 \equiv a \pmod{p^n}$ een oplossing heeft voor alle natuurlijke $n \geq 1$ als en slechts als a een kwadraatrest modulo p is.
   Aanwijzing: bewijs de stelling eerst voor $n = 2$, denk na hoe je een oplossing van $x^2 \equiv a \pmod{p^2}$ zou berekenen uit een oplossing van $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Let wel: nadien wordt een bewijs voor alle $n \geq 1$ verwacht.

4. We willen negentien knikkers verdelen over vier genummerde dozen, zodanig dat er in elke doos minstens één knikker zit.

   - Op hoeveel manieren kunnen we dat doen, als de knikkers identiek zijn (dan is enkel het aantal in doos 1, doos 2, ... van belang)
   - Op hoeveel manieren kunnen we dat doen, als de knikkers ook genummerd zijn (dan is $\{1,2\}$ in de ene pot en $\{3,4\}$ in de andere iets anders dan $\{1,3\}$ in de ene pot en $\{2,4\}$ in de andere: deze twee moeten dan twee keer geteld worden, in tegenstelling tot hierboven).

5. Zijn k, l, n natuurlijke getallen met $k + l \geq n$. Toon de volgende gelijkheid, genaamd de *Chu-Vandermonde convolutie*, aan:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i}\binom{l}{n-i} = \binom{k+l}{n}$$

6. Aan een universiteit is er een vacature voor een vaste betrekking. Er dienen zich 5 kandidaten aan. Een speciale commissie zal een rangschikking opmaken van de drie beste kandidaten. Hoeveel mogelijkheden heeft deze commissie? En hoeveel mogelijkheden heeft deze commissie als op voorhand vastligt welke van de vijf kandidaten op nummer 1 komt?