Examen Projectieve Meetkunde: oefeningen

2de bachelor Wiskunde

maandag 27 juni 2011

All we have to decide is what to do
with the time that is given to us.

Gandalf the Grey in *The Lord of the Rings: The Fellowship of the Ring*

Oefening 1. Beschouw in PG$(2, q)$ de verzameling kegelsneden $\mathcal{K} = \{C_{\lambda,\mu} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{F}_q, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\}$ waarbij de kegelsnede $C_{\lambda,\mu}$ wordt gegeven door de vergelijking

$$\lambda X_2^2 + \lambda X_0 X_1 + \mu X_0 X_2 + \mu X_1 X_2 = 0$$

(i) Hoeveel verschillende kegelsneden bevat $\mathcal{K}$? Hoeveel van deze exemplaren zijn absoluut reducieb el?

(ii) Toon aan dat er vier punten zijn die op elke kegelsnede van $\mathcal{K}$ liggen als q oneven is. Toon aan dat er drie punten P_1, P_2, P_3 zijn die op elke kegelsnede van $\mathcal{K}$ liggen als q even is.

(iii) Veronderstel dat q oneven is. Voor iedere absoluut reduciebele kegelsnede $C_{\lambda,\mu} \in \mathcal{K}$ die bestaat uit twee verschillende rechten, noemen we het snijpunt van die twee rechten een dubbelpunt. Zij $\mathcal{D}$ de verzameling van die dubbelpunten. Toon aan dat ieder drietal uit $\mathcal{D}$ een pooldriehoek bepaalt tegenover elke polariteit behorend bij een absoluut irreduciebele kegelsnede in $\mathcal{K}$.

(iv) Veronderstel dat q even is. Toon aan dat voor juist één van de drie punten P_1, P_2, P_3 de raaklijn in dit punt aan om het even welk absoluut irreduciebel exemplaar van $\mathcal{K}$ dezelfde is.

Oefening 2. Beschouw in PG$(4, q^2)$ de puntenverzameling Ω, bepaald door de vergelijking

$$X_0^{q+1} + X_3^{q+1} + X_4^{q+1} = 0.$$

(i) Tel het aantal punten van Ω. Hint: kijk naar de doorsnede van Ω met het vlak $X_1 = X_2 = 0$.

(ii) Wat is de maximale dimensie van de deelruimten op Ω?

(iii) De raakruimte in een punt P van een puntenverzameling is de unie van de rechten door P die in de puntenverzameling bevat zijn of met de puntenverzameling enkel P gemeen hebben. Zij $\beta \in \mathbb{F}_{q^2}$ zodanig dat $\beta^{q+1} = -1$. Het punt $Q(0, 0, 0, \beta, 1)$ ligt dan in Ω. Je mag zonder bewijs aannemen dat de raakruimte in Q aan Ω een hypervlak is. Geef de vergelijking van dit raakhypervlak in Q aan Ω.

(iv) Hoeveel rechten die volledig in Ω bevat zijn, gaan er door het punt $Q'(0, 0, 1, 0, 0)$? Hoeveel rechten die volledig in Ω bevat zijn, gaan er door het punt Q?

Examen Projectieve Meetkunde: oefeningen

2de bachelor Wiskunde

maandag 25 juni 2012

Lasciate ogne speranza voi ch'intrate.

Dante - *La Divina Commedia, Inferno, Canto III*

Oefening 1. Een $\{d, m\}$-boog in $PG(2, q)$ is een verzameling van $m \geq 1$ punten zodat iedere rechte er hoogstens d bevat, $1 \leq d \leq q$. We definiëren $m_q(d) := q(d-1) + d$.

(i) Zij $\mathcal{B}$ een $\{d, m\}$-boog in $PG(2, q)$. Toon aan dat $m \leq m_q(d)$.

Een $\{d, m_q(d)\}$-boog in $PG(2, q)$ noemen we bijgevolg een d-maximale boog.

(ii) Geef een voorbeeld van een 1-maximale boog en van een q-maximale boog in $PG(2, q)$.

(iii) Zij $\mathcal{B}$ een $\{d, m\}$-boog in $PG(2, q)$. Als een rechte i punten van $\mathcal{B}$ bevat, noemen we deze rechte een i-secant. Tel het aantal i-secanten aan een d-maximale boog voor alle $i \in \{0, \ldots, q+1\}$. Tel ook het aantal i-secanten door een vast punt Q dat niet op de maximale boog ligt.

(iv) Zij $\mathcal{B}$ een d-maximale boog in $PG(2, q)$. Leid uit (iii) af dat $d \mid q$. Bewijs dat een $\frac{q}{d}$-maximale boog bestaat.

(v) Veronderstel dat q even is. Zij C een absoluut irreduciebele kegelsnede met kern N en zij α een niet-triviale homologie met centrum N. Toon aan dat $C^\alpha \cap C = \emptyset$ als en slechts als de as van α de kegelsnede C niet snijdt.

(vi) Veronderstel dat $q \geq 4$ even is. Construeer een 4-maximale boog. Hint: beschouw kegelsneden met eenzelfde kern.

Oefening 2. Zij β een polariteit van $PG(n, \mathbb{F})$, $\mathbb{F}$ een veld, $n \geq 3$. Beschouw de volgende uitspraak: zij ℓ een willekeurige rechte in $PG(n, q)$, dan zijn alle punten op ℓ absoluut als en slechts als ℓ zelf absoluut is.

(i) Veronderstel dat β orthogonaal of hermitisch is. Toon aan dat deze uitspraak waar is.

(ii) Toon aan dat deze uitspraak niet waar is als β een symplectisch polariteit is.

(iii) Veronderstel dat β een pseudopolariteit is. Toon aan dat deze uitspraak waar is als en slechts als $\pi \subseteq \pi^\beta$, met π de deelruimte van de absolute punten.