Oefeningen Analyse IV

2 1. Verklaar uitvoerig waarom de aangeduide stappen in de volgende redenering (niet) juist zijn:

Stelling. *Zij K_1, K_2 twee compacte metrische ruimten. Als voor elke $\varepsilon > 0$ een afbeelding $f\colon K_1 \to K_2$ bestaat met de eigenschap dat*

$$\sup_{x,y \in K_1} |d(f(x), f(y)) - d(x,y)| \leq \varepsilon,$$

dan bestaat een isometrische inbedding $K_1 \to K_2$.

Bewijs. Zij voor elke $n \in \mathbb{N}$, f_n een afbeelding $K_1 \to K_2$ met de eigenschap dat

$$|d(f_n(x), f_n(y)) - d(x,y)| \leq 1/n, \quad \forall x, y \in K_1.\texttt{[1]}$$

Omdat K_1 separabel[2] is, bestaat een aftelbare dichte deelverzameling $Q = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K_1$. De rij $(f_n(q_1))_{n\in\mathbb{N}}$ heeft een convergente deelrij $(f_n(q_1))_{n\in A_1}$[3]. De rij $(f_n(q_2))_{n\in A_1}$ heeft een convergente deelrij $(f_n(q_2))_{n\in A_2}$ (voor zekere $A_2 \subseteq A_1$), enz. Noem voor elke $m \in \mathbb{N}$ de limiet $\lim_{n\to\infty, n\in A_m} f_n(q_m) =: f(q_m)$.
We tonen aan dat $f\colon Q \to K_2$ afstandbehoudend is. Zij $m, k \in \mathbb{N}$ met $m \leq k$. Dan is

$$\begin{aligned} |d(f(q_m), f(q_k)) - d(q_m, q_k)| &\overset{\texttt{[4]}}{=} \Big|d\Big(\lim_{n\to\infty, n\in A_k} f_n(q_m), \lim_{n\to\infty, n\in A_k} f_n(q_k)\Big) - d(q_m, q_k)\Big| \\ &\overset{\texttt{[5]}}{=} \lim_{n\to\infty, n\in A_k} |d(f_n(q_m), f_n(q_k)) - d(q_m, q_k)| \overset{\texttt{[6]}}{=} 0. \end{aligned}$$

I.h.b. is f gelijkmatig continu[7]. f breidt dus uit tot een continue afbeelding $f\colon K_1 \to K_2$[8] die afstandbehoudend is omdat $f_{|Q}$ afstandbehoudend is. □

[1]: waarom bestaat f_n met deze eigenschap?
[2-8]: verklaar.

2 2. Zij d_{discr} de discrete metriek op $\mathbb{R}$ en d_{Eucl} de Euclidische (=gewone) metriek op $\mathbb{R}$.

(a) Is de identieke afbeelding $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, d_{\text{discr}}) \to (\mathbb{R}, d_{\text{Eucl}})$: $\mathrm{id}(x) = x$ continu? ja

(b) Is de identieke afbeelding $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, d_{\text{discr}}) \to (\mathbb{R}, d_{\text{Eucl}})$: $\mathrm{id}(x) = x$ een homeomorfisme? nee

Motiveer je antwoord met een bewijs.

1 3. Geef een voorbeeld van een metrische ruimte M, een compacte metrische ruimte K en een continue afbeelding $M \to K$ die niet gelijkmatig continu is.

2 4. Zij M_1, M_2 metrische ruimten en f een afbeelding $M_1 \to M_2$. Toon aan dat f gelijkmatig continu is als en slechts als

$$(\forall (x_n)_n, (y_n)_n \text{ rijen in } M_1)(d(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow d(f(x_n), f(y_n)) \to 0).$$

3 5. Zij K, L compacte metrische ruimten, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ en

$$\mathcal{F}_c := \{f : K \to L : (\forall x, y \in K)\ d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x,y)\}.$$

(a) Toon aan dat $\mathcal{F}_c$ gesloten is in $(\mathcal{C}(K, L), d_\infty)$.

(b) Toon aan dat $\mathcal{F}_c$ compact is (voor d_∞).

(c) Als voor elke $c > 1$ een Lipschitz-afbeelding $K \to L$ bestaat met Lipschitz-constante ten hoogste c, toon dan aan dat ook een Lipschitz-afbeelding $K \to L$ bestaat met Lipschitz-constante ten hoogste 1.
HINT: gebruik deel (b).

2 6. Toon aan dat er geen injectieve continue afbeelding $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bestaat.

1. (a) Toon aan dat compactheid een continue invariant is.

   (b) Zij K een compacte metrische ruimte en zij $(f_n)_n$ een dalende rij van continue afbeeldingen $K \to \mathbb{R}$. Als $(f_n)_n$ puntsgewijs convergeert op K naar een continue afbeelding $g\colon K \to \mathbb{R}$, toon dan aan dat de convergentie gelijkmatig is.

2. Formuleer de stelling i.v.m. uitbreiding door continuïteit van lineaire afbeeldingen gedefinieerd op een dichte deelruimte van een genormeerde ruimte. + bewijs Schets hoe de integraal van een Banachruimte-waardige functie gedefinieerd kan worden a.d.h.v. deze stelling.

3. Beantwoord de vragen:

Lemma 1. *Zij X een reële genormeerde ruimte, $Y < X$, $\varphi \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R})$ en $x \in X \setminus Y$. Dan bestaat een uitbreiding van φ tot $\psi \in \mathcal{L}(Y + \mathbb{R}x, \mathbb{R})$ met $\|\psi\|_{\mathcal{L}(Y+\mathbb{R}x,\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{\mathcal{L}(Y,\mathbb{R})}$.*

Bewijs. Door een herschaling volstaat het het lemma te bewijzen voor $\|\varphi\| = 1$ (het geval $\|\varphi\| = 0$ is triviaal [1]). Wegens lineariteit is ψ volledig bepaald door $\psi(x)$: als ψ bestaat, is

$$\psi(y + \lambda x) = \varphi(y) + \lambda\psi(x), \quad \forall y \in Y,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Omgekeerd definieert $\psi(y + \lambda x) := \varphi(y) + \lambda\psi(x)$ voor $y \in Y$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ eenduidig een lineaire afbeelding $Y + \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$, eens $\psi(x) \in \mathbb{R}$ gekozen is. De waarde van $\psi(x)$ wordt verder enkel beperkt door de voorwaarde dat $\|\psi\| \le 1$ [2], d.w.z. dat

$$|\varphi(y) + \lambda\psi(x)| = |\psi(y + \lambda x)| \le \| y + \lambda x\|, \quad \forall y \in Y,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Als voorwaarde op $\psi(x)$ wordt dit (het geval $\lambda = 0$ is vervuld):

$$-\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) - \left\|\frac{y}{\lambda} + x\right\| \le \psi(x) \le -\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \left\|\frac{y}{\lambda} + x\right\|, \quad \forall y \in Y,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

m.a.w.,

$$-\varphi(y) - \|y + x\| \le \psi(x) \le -\varphi(y) + \|y + x\|, \quad \forall y \in Y. \tag{1}$$

We gaan eerst de nodige voorwaarde na dat [3]

$$-\varphi(y) - \|y + x\| \le -\varphi(y') + \|y' + x\|, \quad \forall y, y' \in Y, \tag{2}$$

of nog, dat $\varphi(y' - y) \le \|y + x\| + \|y' + x\|$ voor elke $y, y' \in Y$. Dit is vervuld, want

$$|\varphi(y' - y)| \overset{[4]}{\le} \|y' - y\| = \|(y' + x) - (y + x)\| \le \|y' + x\| + \|y + x\|, \quad \forall y, y' \in Y.$$

Tenslotte maken we gebruik van het supremum-principe in $\mathbb{R}$: stel $\psi(x) := \sup_{y \in Y} -\varphi(y) - \|y + x\|$. Wegens formule (2) voldoet $\psi(x)$ dan aan formule (1). [5,6] $\square$

[1] Waarom is het geval $\|\varphi\| = 0$ triviaal?

[2] Moeten we hier niet schrijven: 'de waarde van $\psi(x)$ wordt verder enkel beperkt door de voorwaarde dat $\|\psi\| = 1$'? Leg uit.

[3] Volgt formule (2) uit formule (1)? Leg uit.

[4] Verklaar.

[5] Leg meer in detail uit waarom $\psi(x)$ voldoet aan formule (1).

[6] Hoe volgt het te bewijzen hieruit?

1. Toon aan dat de volgende eigenschappen equivalent zijn voor een metrische ruimte M:

   (a) M is compact

   (b) elke dalende rij $(F_n)_n$ van niet-lege, gesloten deelverzamelingen van M heeft een niet-lege doorsnede.

   (c) elke rij $(F_n)_n$ met de eindige doorsnede-eigenschap van gesloten deelverzamelingen van M heeft een niet-lege doorsnede.

   Geef en bewijs ook een karakterisering die je verkrijgt door overgang op complementen.

2. Toon aan dat voor genormeerde ruimten X, Y geldt:

   (a) $(\mathcal{L}(X,Y), \|.\|)$ is een genormeerde ruimte.

   (b) Als Y een Banach-ruimte is, dan is ook $\mathcal{L}(X,Y)$ een Banach-ruimte.

   Je mag hierbij (zonder bewijs) gebruik maken van de volgende eigenschap:

   Stelling 1. *Zij V een niet-lege verzameling en (M,d) een complete metrische ruimte. Dan is $(\mathcal{B}(V,M), d_\infty)$ compleet.*

3. Beantwoord de vragen:

   Lemma 2. *Zij X een reële genormeerde ruimte, $Y < X$, $\varphi \in \mathcal{L}(Y,\mathbb{R})$ en $x \in X \setminus Y$. Dan bestaat een uitbreiding van φ tot $\psi \in \mathcal{L}(Y + \mathbb{R}x, \mathbb{R})$ met $\|\psi\|_{\mathcal{L}(Y+\mathbb{R}x,\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{\mathcal{L}(Y,\mathbb{R})}$.*

   Bewijs. Door een herschaling volstaat het het lemma te bewijzen voor $\|\varphi\| = 1$ (het geval $\|\varphi\| = 0$ is triviaal). Wegens lineariteit is ψ volledig bepaald door $\psi(x)$: als ψ bestaat, is

   $$\psi(y + \lambda x) = \varphi(y) + \lambda\psi(x), \quad \forall y \in Y,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

   Omgekeerd definieert $\psi(y + \lambda x) := \varphi(y) + \lambda\psi(x)$ voor $y \in Y$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ eenduidig een lineaire afbeelding $Y + \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$, eens $\psi(x) \in \mathbb{R}$ gekozen is. De waarde van $\psi(x)$ wordt verder enkel beperkt door de voorwaarde dat $\|\psi\| \le 1$[1], d.w.z. dat [2]

   $$|\varphi(y) + \lambda\psi(x)| = |\psi(y + \lambda x)| \le \| y + \lambda x\|, \quad \forall y \in Y,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   Als voorwaarde op $\psi(x)$ wordt dit (het geval $\lambda = 0$ is vervuld):

   $$-\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) - \left\|\frac{y}{\lambda} + x\right\| \le \psi(x) \le -\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \left\|\frac{y}{\lambda} + x\right\|, \quad \forall y \in Y,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

   m.a.w.,

   $$-\varphi(y) - \|y + x\| \le \psi(x) \le -\varphi(y) + \|y + x\|, \quad \forall y \in Y. \tag{2}$$

   We gaan eerst de nodige voorwaarde na dat

   $$-\varphi(y) - \|y + x\| \le -\varphi(y') + \|y' + x\|, \quad \forall y, y' \in Y, \tag{3}$$

   of nog, dat $\varphi(y' - y) \le \|y + x\| + \|y' + x\|$ voor elke $y, y' \in Y$. Dit is vervuld, want

   $$|\varphi(y' - y)| \le \| y' - y\| = \|(y' + x) - (y + x)\| \le \|y' + x\| + \|y + x\|, \quad \forall y, y' \in Y.$$

   Tenslotte maken we gebruik van het supremum-principe in $\mathbb{R}$: stel $\psi(x) := \sup_{y\in Y} -\varphi(y) - \|y + x\|$. Wegens formule (3) voldoet $\psi(x)$ dan aan formule (2). [3] $\square$

   [1] Moeten we hier niet schrijven: 'de waarde van $\psi(x)$ wordt verder enkel beperkt door de voorwaarde dat $\|\psi\| = 1$'? Leg uit.
   [2] Is $\|\psi\| \le 1$ equivalent met formule (1)? Leg uit.
   [3] Leg uit hoe uit de laatste stap het te bewijzen volgt (licht de structuur van het bewijs toe).

4. Beantwoord de vragen: (Z.O.Z.)

Oefeningen Analyse IV

1. Verklaar of weerleg de aangeduide stappen in het volgende bewijs:

   Stelling. *Zij X een genormeerde ruimte, $Y \leq X$ met $\dim X = \infty$ en $\dim Y < \infty$. Dan bestaat voor elke $\varepsilon > 0$ een $x \in X$ met $\|x\| = 1$ en met de eigenschap dat*

   $$(\forall y \in Y \text{ met } \|y\| = 1)(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \ \ \|y + \lambda x\| \geq 1 - \varepsilon.$$

   Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ (we mogen aannemen dat $\varepsilon < 1$). Omdat $S := \{y \in Y : \|y\| = 1\}$ compact [1] is, bestaan $y_1, \ldots, y_N \in S$ (zekere $N \in \mathbb{N}$) waarvoor $S \subseteq B(y_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(y_N, \varepsilon)$ [2]. Verder bestaat bij elke y_i een $\varphi_i \in X^*$ met $\|\varphi_i\| = 1$ en $\varphi_i(y_i) = 1$ [3]. De afbeelding φ: $X \to \mathbb{K}^N$: $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x))$ is een continue lineaire afbeelding [4]. Zou φ injectief zijn, dan zou $\dim X \leq \dim(\mathbb{K}^N)$, een strijdigheid [5]. Bijgevolg vinden we een $x \in \operatorname{Ker} \varphi$ met $\|x\| = 1$ [6]. Neem nu willekeurig $\lambda \in \mathbb{K}$ en $y \in Y$ met $\|y\| = 1$. Dan is $\|y - y_i\| < \varepsilon$ voor zekere i[7], zodat

   $$\|y + \lambda x\| \overset{[8]}{\geq} \|y_i + \lambda x\| - \|y - y_i\| \geq \|y_i + \lambda x\| - \varepsilon \overset{[9]}{\geq} \varphi_i(y_i + \lambda x) - \varepsilon \overset{[10]}{\geq} 1 - \varepsilon.$$

   $\square$

2. Zij M_1, M_2, M_3 metrische ruimten. Zij f, f_n afbeeldingen $M_1 \to M_2$ en g, g_n afbeeldingen $M_2 \to M_3$ (voor elke $n \in \mathbb{N}$).

   (a) Toon aan: als $g_n \overset{M_2}{\rightrightarrows} g$, dan is ook $g_n \circ f \overset{M_1}{\rightrightarrows} g \circ f$.

   (b) Toon aan: als $f_n \overset{M_1}{\rightrightarrows} f$, $g_n \overset{M_2}{\rightrightarrows} g$ en g is gelijkmatig continu, dan is ook $g_n \circ f_n \overset{M_1}{\rightrightarrows} g \circ f$. HINT: beschouw eventueel eerst het bijzonder geval $g_n = g$ $(\forall n)$

   (c) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat deel (b) niet blijft gelden als g slechts continu i.p.v. gelijkmatig continu verondersteld wordt.

3. Zij M, M' metrische ruimten. Dan wordt een afbeelding f: $M \to M'$ een *open afbeelding* genoemd als $f(U)$ open is in M', voor elke open U in M. Toon aan:

   f is open als en slechts als $f(B(x, 1/n))$ open is (in M') voor elke $x \in M$ en $n \in \mathbb{N}$.

4. Zij M een metrische ruimte en f een afbeelding $[0,1] \to M$ die lokaal injectief is, d.w.z. elk punt van M_1 heeft een omgeving waarop f injectief is. Toon aan dat f stuksgewijs injectief is, d.w.z. dat $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ bestaan zo dat f injectief is op $[t_{n-1}, t_n]$ voor elke $n \in \{1, \ldots, N\}$.

5. Zij f een homeomorfisme $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (zekere $d \in \mathbb{N}$). Toon aan dat $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = +\infty$.

inj : $\forall x \in X$: $\exists$ een $\in$ beeld [illegible]

$y \in$ beeld

$= [illegible] f(x)$