23.I.2012

Wiskundige Analyse I, theorie (= 60% van de punten)

- *Beantwoord elk van de vragen I,II,III en IV op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op blad I, bovenaan de eerste bladzijde, uw naam (familienaam in drukletters) en studierichting. Stop de dubbele geruite bladen vanaf II in het dubbele geruite blad I. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven zonder verdere toelichting.*
- *Als een vraag u niet helemaal duidelijk is, vraag dan toelichting.*
- *Rekenmachines of andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.*

Vraag I.

1. Formuleer en bewijs de 'integraaltest' voor convergentie van een bepaald type reeks.
2. Onderzoek daarmee de convergentie van de harmonische reeks (alleen dié reeks).
3. Definieer daarmee de constante van Euler.

Vraag II.

1. Geef de voorwaarden (niets bewijzen) waaronder
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + (x - x_0)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt$$
2. Formuleer en bewijs de formule met de andere gedaante van de restterm.

Vraag III. *(Er is geen verband tussen de drie onderdelen. De antwoorden zijn kort.)*

1. Gegeven: Als f continu over het compact interval $I = [a, b]$ is, dan is $f(I)$ begrensd. *(Dit moet hier niet bewezen worden.)* Bewijs dat $f(I)$ een grootste element heeft. (Uit 'extremumstelling van Weierstrass'.)
2. Gegeven: f is stuksgewijze Lipschitzcontinu in $[-\pi, \pi]$, met verdeelpunten
$$\underbrace{-\pi = x_0 < x_1 < \ldots}_{\leqslant 0} < \underbrace{x_k < \cdots < x_n = \pi}_{>0}.$$
Bewijs dat $q(t) := \frac{f(t)-f(0+)}{\sin\frac{t}{2}}$ over $]0, x_k[$ integreerbaar is. (Uit 'singuliere integraal van Dirichlet'.)
3. Gegeven: een complexe machtreeks $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ met convergentiestraal $R \in \mathbb{R}^+$, en $0 < r < R$. Bewijs dat $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)|a_n|\, r^{n-2}$ convergent is. (Uit 'termsgewijze afleiding van een machtreeks'.)

Vraag IV.

1. Geef de exacte formule voor $f_n \xrightarrow{A} f$ en voor $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$
2. *Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):*
   (a) Als $\int f$ bestaat, dan is $\int f$ een afleidbare functie.
   (b) Is f over $[a, b]$ stuksgewijze Lipschitzcontinu, dan is f over $[a, b]$ gelijkmatig continu.
   (c) f^- is een negatieve functie.
   (d) Is f integreerbaar maar niet continu, dan is $\left(\int_0^x \left(\int_0^u f\right) du\right)' = \int_0^x f$.
   (e) De reeks $1 + \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{3^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4^{\sqrt{2}}} + \ldots$ is convergent.
   (f) $f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff |f| \in \mathcal{R}([a, b])$.

EINDE THEORIE

Tijd tot 12.30. Oefeningen: 14.00, iedereen in dezelfde leszaal.

23.I.2012

Wiskundige Analyse I, oefeningen (= 40% van de punten)

- *Beantwoord elk van de vragen I,II,III en IV op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op blad I, bovenaan de eerste bladzijde, uw naam (familienaam in drukletters) en studierichting. Stop de dubbele geruite bladen vanaf II in het dubbele geruite blad I. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*
- *Rekenmachines of andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.*

Vraag I. Geef de Taylorbenadering (centraal punt 0) voor

$$\frac{1}{\cosh(\sin x)}$$

tot en met x^6.

Vraag II. Onderzoek de convergentie en de absolute convergentie van de reeks

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{\ln n}{n^p}$$

met parameter $p \in \{1, 2, \dots\}$.

Vraag III.

1. Geef de Fourierontwikkeling t.o.v. $[-\pi, \pi]$ van de functie

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & (-\pi < x < 0) \\ 0 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

2. Leid daaruit de reekssom

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

af.

Vraag IV. Los $y(x)$ op uit

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x^{3/2}\cos x,$$

wetend dat $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ voor $x > 0$ voldoet aan de homogene vergelijking. (Dit moet niet gecontroleerd worden.)

EINDE EXAMEN

Tijd tot ~~12.30~~.
18.00