Examen Toegepaste Wiskundige Evolutiemodellen (20 augustus 2012)
Gesloten Boek

---

1. Tensorproducten.

Beschouw een algemeen element

$$z = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_i \otimes e_j \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$$

van het tensorproduct $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$.

Geef een nodige en voldoende voorwaarde voor de coëfficiëntenmatrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ opdat z van de vorm $z = x \otimes y$ zou zijn met $x, y \in \mathbb{C}^n$.

2. De limietpunt-van-cycli (LPC) bifurcatie.

Beschouw een LPC bifurcatie die zich voordoet in een dynamisch systeem voor de parameterwaarde $\alpha = \alpha_0$. De centrale varieteit W_0^c kan daar lokaal geparametrizeerd worden door de reële variabelen τ, ξ, voor kleine $|\xi|$ en waarbij de parametrizatie periodiek is in τ met periode T_0, de periode van de cykel. In W_0^c kan het dynamisch systeem dan geherformuleerd worden door

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} &= 1 - \xi + a\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \\ \dfrac{d\xi}{dt} &= b\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \end{cases} \tag{1}$$

waarbij $a, b \in \mathbb{R}$.

In de buurt van de LPC bifurcatie, d.w.z. voor nabijgelegen parameterwaarden α kan het dynamisch systeem geherformuleerd worden in W_α^c door

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} &= 1 + \nu(\alpha) - \xi + a(\alpha)\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \\ \dfrac{d\xi}{dt} &= \beta(\alpha) + b(\alpha)\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \end{cases} \tag{2}$$

Opgaven:

1. Bespreek de stabiliteit van de periodieke baan voor $\alpha = \alpha_0$.
2. Bespreek het dynamisch gedrag van het systeem in de buurt van $\alpha = \alpha_0$, in het bijzonder het bestaan en de stabiliteit van de periodieke banen in W_α^c, en wat er gebeurt als α nadert tot α_0.

3. Illustreer dit gedrag met enige schetsen.

3. Model van Kermack en McKendrick.

Het eerste model van Kermack en McKendrick beschrijft een ziekte die uitbreekt in een gesloten populatie met constante omvang:

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta S I, \\ \dot{I} &= \beta S I - \gamma I, \\ \dot{R} &= \gamma I. \end{cases} \tag{3}$$

De beginvoorwaarden zijn $S(0) \approx N$, $I(0) = N - S(0) \approx 0$, $R(0) = 0$. Bespreek dit model, d.w.z.

1. Bespreek de betekenis van S, I, R en van de parameters van het systeem.
2. Beschrijf hoe men dit systeem kan herschalen zo dat het nog slechts afhangt van een enkele parameter R_0.
3. Leid hieruit de voorwaarde af die moet vervuld zijn opdat een epidemie zou kunnen uitbreken wanneer een klein aantal geïnfecteerde individuen in de populatie gebracht wordt.
4. Verklaar hoe de ziekte kan uitsterven voor al de leden van de populatie besmet zijn en stel een vergelijking op voor de fractie Z_∞ van de bevolking die de ziekte krijgt voor zij uitsterft.

4. Het SIR model.

Beschouw het constante-bevolkings SIR model met geboorten, d.w.z.

$$\begin{cases} \dot{S} &= \mu N - \beta S I - \mu S, \\ \dot{I} &= \beta S I - (\gamma + \mu) I, \\ \dot{R} &= \gamma I - \mu R. \end{cases} \tag{4}$$

Bespreek dit model, d.w.z.

1. Bespreek de betekenis van S, I, R en van de parameters van het systeem in een typische situatie zoals mazelen of windpokken.
2. Definieer het basis reproductietempo R_0 en bereken het in termen van de parameters van het systeem.
3. Bespreek de evenwichtstoestanden en hun stabiliteit.

4. Bespreek het schatten van de parameters van het systeem.

5. Bespreek het dynamisch gedrag dat men kan verwachten onder redelijke aannames zoals voor mazelen of windpokken.

Gent, 20 augustus 2012

Prof. W. Govaerts