Examen Toegepaste Wiskundige Evolutiemodellen (12 juni 2012)
Gesloten Boek

1. Tensorproducten.

Is ieder element van het tensorproduct $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ noodzakelijk van de vorm $x \otimes y$ voor zekere $x, y \in \mathbb{C}^n$? Bewijs dit of geef anders een zo eenvoudig mogelijk tegenvoorbeeld.

2. De periode-verdubbelende (flip - PD) bifurcatie.

Beschouw een PD bifurcatie die zich voordoet in een dynamisch systeem voor de parameterwaarde $\alpha = \alpha_0$. De centrale varieteit W_0^c kan daar lokaal geparametrizeerd worden door (τ, ξ), met een parametrizatie die periodiek is in τ met periode $2T$. Binnen deze centrale variëteit wordt de dynamica van het systeem beschreven door:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} &= 1 + a\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^4), \\ \dfrac{d\xi}{dt} &= c\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4), \end{cases} \tag{1}$$

waarbij $a, c \in \mathbb{R}$.

In de buurt van de PD bifurcatie, d.w.z. voor nabijgelegen parameterwaarden α kan het dynamisch systeem geherformuleerd worden in W_α^c door

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} &= 1 + \nu(\alpha) + a(\alpha)\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^4), \\ \dfrac{d\xi}{dt} &= \beta(\alpha)\xi + c(\alpha)\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4), \end{cases} \tag{2}$$

waarbij $\beta(\alpha_0) = \nu(\alpha_0) = 0$ and $(a(\alpha_0), c(\alpha_0))$ samenvalt met (a, c) in (1).

Opgaven:

1. Bespreek de stabiliteit van de periodieke baan voor $\alpha = \alpha_0$.
2. Bespreek het dynamisch gedrag van het systeem in de buurt van $\alpha = \alpha_0$, in het bijzonder het bestaan en de stabiliteit van de periodieke banen in W_α^c, en wat er gebeurt als α nadert tot α_0.
3. Illustreer dit gedrag met enige schetsen.

3. De epidemische kromme.

Beschouw het systeem dat de epidemische kromme beschrijft:

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} &= -R_0XY \\ \frac{dY}{d\tau} &= R_0XY - Y \\ \frac{dZ}{d\tau} &= Y, \end{cases} \tag{3}$$

waarbij $R_0 > 1$ de basisreproductieverhouding voorstelt. Onderstel dat de epidemie uitbreekt op het tijdstip $t = 0$ voor de beginwaarden $X(0) = X_0$ met $0 < X_0 < 1$, $Y(0) = 1 - X_0$, $Z(0) = 0$. Bereken (uiteraard analytisch) de waarden van X, Y, Z op het ogenblik dat Y (de fractie geïnfecteerden) het hoogste is.

↳ maximaal is

4. Een HIV model.

Beschouw het HIV model met protease afremmer (protease inhibitor):

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} &= \lambda - dT - kV_IT \\ \frac{dT^*}{dt} &= kV_IT - \delta T^* \\ \frac{dV_I}{dt} &= -cV_I \\ \frac{dV_{NI}}{dt} &= N\delta T^* - cV_{NI} \end{cases} \tag{4}$$

Opgaven:

1. Geef de betekenis en de dimensies van alle optredende toestandsvariabelen en parameters.
2. Beschrijf de tijdsevolutie van dit model, uitgaande van de vereenvoudigende aanname dat het systeem op het ogenblik $t = 0$ in een evenwichtstoestand is van het systeem zonder protease afremmer en dat T constant blijft tijdens de toepassing van de protease afremmer.
3. Leg uit hoe men uit een vergelijking van de oplossing van dit model en de clinische waarnemingen een schatting kan bekomen van de reproductiesnelheid van de virussen en waarom het kennen van de reproductiesnelheid van belang is voor de behandelingen die men toepast.

Gent, 12 juni 2012

Prof. W. Govaerts