Examen Analyse 2 : Theorie (zonder Maple). (6 september 2011)

1. Rijen en reeksen van reële functies.

Geef met bewijs de reeksontwikkelingen van de functies $\cos(x)$ en $\mathrm{ch}(x)$ als MacLaurin reeksen.

2. Gewone differentiaalvergelijkingen.

Bespreek de integratie van een gereduceerde lineaire differentiaalvergelijking van tweede orde met constante coëfficiënten.

3. De Laplace transformatie.

Geef met bewijs de formule voor de Laplacegetransformeerde $\mathcal{L}[y^{(n)}(x)](s)$ voor een functie $y(x)$ die voldoende afleidbaar is en die samen met een voldoende aantal afgeleiden van exponentiële orde is.

4. Partiële differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de eendimensionale golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Geef met bewijs de algemene vorm van de oplossingen van deze vergelijking die van het type "reizende golf"' zijn. Als toepassing, beschrijf de tijdsevolutie van een oneindige snaar die op het ogenblik $t = 0$ met het profiel

$$\phi(x) = \frac{1}{1 + 8x^2}$$

uit een beweginloze toestand losgelaten wordt.

Gent, 6 september 2011

Prof. W. Govaerts

Examen Analyse 2 : Oefeningen. (6 september 2011) Reeks 2.

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple! Probeer de door Maple gegeven uitkomsten altijd zoveel mogelijk te vereenvoudigen.

1. Fourierreeksen

Beschouw de functie f die bepaald is door

$$f(x) = 1 - x^2, \forall x \in [-1, +1]$$

a. Geef de bijbehorende Fourierreeks met hoofdperiode 2.
b. Geef afzonderlijk de coefficienten van de reeksontwikkeling met even en met oneven index.
c. Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie f in elk punt van $[-1, 1]$? Geef de reden waarom of waarom niet.

2. Differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de differentiaalvergelijking (DV)

$$y^{(3)} - 8y'' + 19y' - 12y = 0.$$

a. Geef de karakteristieke vergelijking (KV) van deze DV.
b. Wat zijn de wortels van de KV?
c. Wat is de algemene oplossing van de DV?
d. Welke oplossing van de DV voldoet aan $y^{(2)}(1) = 1, y'(1) = 0, y(1) = 0$?

3. De Laplacetransformatie.

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' - y' + 6y = -2 \sin 3x; y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

1. Pas de Laplacetransformatie toe om een algebraïsche vergelijking in $\mathcal{L}[y(x)](s)$ te bekomen.
2. Los deze vergelijking op naar $\mathcal{L}[y(x)](s)$ en ontbind het rechterlid in partieelbreuken.
3. Bereken $y(x)$ door toepassing van de inverse Laplacegetransformeerde op het rechterlid.

Gent, 6 september 2011

Prof. W. Govaerts