Oplossingen oefeningenexamen Algebra I

maandag 17 januari 2011 – tweede bachelor wiskunde

1. Zij G een eindige groep, P een Sylow p-deelgroep van G, en H een deelgroep van G zodat $N_G(P) \leq H \leq G$. Toon aan dat $N_G(H) = H$.

Oplossing. De inclusie $H \leq N_G(H)$ is triviaal. Neem nu een willekeurig element $g \in N_G(H)$; we willen aantonen dat dan $g \in H$. Merk op dat P ook een Sylow p-deelgroep van H is (want $P \leq N_G(P) \leq H$), en dat ook P^g een Sylow p-deelgroep van H is omdat $P^g \leq H^g = H$. Dus zijn P en P^g twee Sylow p-deelgroepen van H, die wegens de stelling van Sylow toegevoegd zijn aan elkaar in H. Met andere woorden, er bestaat een $h \in H$ zodat $(P^g)^h = P$. Maar dan is $gh \in N_G(P) \leq H$, en omdat ook reeds $h \in H$ besluiten we dat $g \in H$, wat we moesten bewijzen.

2. Zij G een eindige groep, $N \trianglelefteq G$, en A een klasse van toegevoegde elementen in G zodat $A \subseteq N$.
   (i) Toon aan dat A een unie is van een aantal klassen van toegevoegde elementen in N die allemaal dezelfde grootte hebben.
   (ii) Noem dit aantal klassen k; toon aan dat dan $k = [G : C_G(x)N]$ voor elke $x \in A$.

Oplossing.

(i) Elementen van N die toegevoegd zijn in N, zijn in het bijzonder ook toegevoegd in G; dus elke klasse van toegevoegde elementen van de vorm x^N met $x \in A$ is volledig bevat in A. Dus is $A = \cup_{x\in A}\, x^N$.
Beschouw nu twee willekeurige dergelijke klassen x^N en y^N, met $x, y \in A$. Omdat $x, y \in A$ bestaat er een $g \in G$ met $y = x^g$, en dus

$$y^N = x^{gN} = x^{Ng} = (x^N)^g ,$$

waar we gebruikt hebben dat $gN = Ng$ omdat $N \trianglelefteq G$. Omdat toevoeging met g een automorfisme is, volgt hieruit $|y^N| = |x^N|$.

(ii) Uit (i) volgt dat het aantal klassen k is gelijk aan $|A|/|x^N|$, met $x \in A$ willekeurig. Uit de baanformule volgt dat enerzijds $|A| = |x^G| = |G|/|C_G(x)|$, terwijl anderzijds $|x^N| = |N|/|C_N(x)|$. Bijgevolg is

$$\begin{aligned}[G : C_G(x)N] &= \frac{|G|}{|C_G(x)N|} = \frac{|G||C_G(x) \cap N|}{|C_G(x)||N|} \\ &= \frac{|G||C_N(x)|}{|C_G(x)||N|} = \frac{|x^G|}{|x^N|} = k\,.\end{aligned}$$

3. Zij R een noetherse ring, en zij $\varphi\colon R \to R$ een surjectief ringmorfisme. Toon aan dat φ een isomorfisme is.
[*Hint: beschouw* $\ker(\varphi^n)$*, waarbij* $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ keer}}$.]

Oplossing. Stel $I_n = \ker(\varphi^n)$; dan zijn I_n idealen in de ring R, en

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$$

is een stijgende keten van idealen. Omdat R noethers is, hebben we $I_n = I_{n+1} = \cdots$ vanaf een zekere $n \in \mathbb{N}$, en dus is $\ker(\varphi^n) = \ker(\varphi^{n+1})$.
Neem nu een $a \in \ker(\varphi)$ willekeurig; omdat φ surjectief is, kunnen we a schrijven als $a = \varphi^n(b)$ voor een zekere $b \in R$. Dan is $b \in \ker(\varphi^{n+1})$, en wegens voorgaande paragraaf is dus ook $b \in \ker(\varphi^n)$, en dus is $a = \varphi^n(b) = 0$. Dus φ is injectief, en bijgevolg een isomorfisme.

4. Een moduul wordt enkelvoudig genoemd als het niet het nul-moduul is en geen eigenlijke deelmodulen heeft. Zij R een ring, M een R-moduul en J een ideaal in R. Onderstel dat M en J enkelvoudige R-modulen zijn. Stel verder

$$JM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} j_i m_i \;\middle|\; j_i \in J, m_i \in M, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(i) Bewijs dat ofwel $JM = M$, ofwel $JM = 0$.

(ii) Veronderstel nu dat $JM = M$. Bewijs dat J en M dan isomorfe R-modulen zijn.

Oplossing.

(i) Stel $N = JM$; dan is N een deelmoduul van M. (Inderdaad, $(N, +)$ is een deelgroep van $(M, +)$, en voor elke $n \in N$ en elke $r \in R$ geldt $rn \in N$ omdat J een ideaal is in R.) Uit de enkelvoudigheid van M volgt dus dat $N = 0$ of $N = M$.

(ii) Omdat $JM \neq 0$ kunnen we een $m \in M$ kiezen zodat $Jm \neq 0$. Beschouw dan de afbeelding

$$\theta\colon J \to M : j \mapsto jm\,.$$

Dan is θ een moduulmorfisme, verschillend van het nulmorfisme. Maar dan is $\ker(\theta)$ een deelmoduul van J, en $\ker(\theta) \neq J$ omdat $\theta \neq 0$; uit de enkelvoudigheid van J volgt dan $\ker(\theta) = 0$. Anderzijds is $\operatorname{im}(\theta)$ een deelmoduul van M, en $\operatorname{im}(\theta) \neq 0$ omdat $\theta \neq 0$; uit de enkelvoudigheid van M volgt nu dat $\operatorname{im}(\theta) = M$. We besluiten dat θ een isomorfisme is.