Examen analyse IV 2009 (1^e zit)
Theorie

1. **Stelling.** Zij I een open interval in $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en f een continue afbeelding $I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die continu afleidbaar is naar de tweede veranderlijke. Dan bestaat $r > 0$ zo dat het beginwaardenprobleem

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \qquad (1)$$

een oplossing heeft in het interval $(t_0 - r, t_0 + r)$.

Bewijs. We zoeken een interval $I_r := [t_0 - r, t_0 + r] \subseteq I$ (met $r > 0$) en een fixpunt x van de afbeelding

$$F : \mathcal{C}(I_r, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}(I_r, \mathbb{R}^n) : [F(x)](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad [1]$$

We trachten hiertoe de contractie-stelling toe te passen op (een deelverzameling van) de ruimte $(\mathcal{C}(I_r, \mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$. We gaan na of F aan de contractie-ongelijkheid voldoet. Voor $x_1, x_2 \in \mathcal{C}(I_r, \mathbb{R}^n)$ is

$$\begin{aligned} \|F(x_2) - F(x_1)\|_\infty &= \sup_{t \in I_r} \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\, ds \right\| \\ &\leq \int_{I_r} \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\|\, ds \leq 2r \sup_{s \in I_r} \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\|. \end{aligned}$$

Om dit verder af te schatten gebruiken we de afleidbaarheid van f. Wegens de middelwaarde-ongelijkheid is

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq \sup_{y \in [y_1, y_2]} \|D_2 f(t, y)\|\, \|y_2 - y_1\|, \quad \forall t \in I,\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Zij $R > 0$. Kies $r_0 > 0$ zo dat $I_{r_0} \subset I$. Omdat $D_2 f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continu is, bereikt $\|D_2 f\|$ een maximum C op de compacte verzameling $I_{r_0} \times \overline{B}(x_0, R)$ [2]. Bijgevolg is

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq C\, \|y_2 - y_1\|, \quad \forall t \in I_{r_0},\ \forall y_1, y_2 \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(x_0, R),$$

zodat voor $r \leq r_0$ en voor $x_1, x_2 \in M_r := \overline{B}_{\mathcal{C}(I_r, \mathbb{R}^n)}(x_0, R)$ [3] (we noteren de constante afbeelding met waarde x_0 ook als x_0)

$$\|F(x_2) - F(x_1)\|_\infty \overset{[4]}{\leq} 2rC \sup_{s \in I_r} \|x_2(s) - x_1(s)\| = 2rC\, \|x_2 - x_1\|_\infty.$$

Kiezen we ook $r < \frac{1}{4C}$ [5], dan voldoet F aan de contractie-ongelijkheid op M_r. Om de contractie-stelling op M_r te kunnen toepassen gaan we na of ook $F(M_r) \subseteq M_r$. Voor $x \in M_r$ vinden we analoog

$$\|F(x) - x_0\|_\infty = \sup_{t \in I_r} \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right\| \leq \int_{I_r} \|f(s, x(s))\|\, ds \overset{[6]}{\leq} 2r \sup_{(s,y) \in I_{r_0} \times \overline{B}(x_0, R)} \|f(s, y)\|.$$

Omdat f continu is en $I_{r_0} \times \overline{B}(x_0, R)$ compact is, is $\sup_{(s,y) \in I_{r_0} \times \overline{B}(x_0,R)} \|f(s,y)\| =: M < +\infty$, zodat ook $\|F(x) - x_0\|_\infty \leq 2rM$. Kiezen we ook $r \leq \frac{R}{2M}$, dan is $F(M_r) \subseteq M_r$ [7]. Vanwege de contractie-stelling [8] toegepast op de complete metrische ruimte [9] M_r heeft de vergelijking (1) een unieke oplossing $x \in M_r$ in het interval $(t_0 - r, t_0 + r)$ [10]. □

[1] Tot welke verzameling behoort x? Tot welke verzameling behoort $[F(x)](t)$?

[2] Waarom is $I_{r_0} \times \overline{B}(x_0, R)$ compact?

[3] Vul aan: $\overline{B}_{\mathcal{C}(I_r, \mathbb{R}^n)}(x_0, R) = \{x \in \ldots : \ldots\}$.

[4] Verklaar de overgang.

[5] Kunnen we op dit moment r nog vrij kiezen? Waarom (niet)?

[6] Verklaar de overgang.

[7] Waarom is $F(M_r) \subseteq M_r$?

[8] Formuleer de versie van de contractie-stelling die hier toegepast wordt. Waarom wordt ze niet rechtstreeks toegepast op F: $\mathcal{C}(I_r, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}(I_r, \mathbb{R}^n)$? Voor welke waarde van r wordt ze toegepast?

[9] Waarom is M_r een complete metrische ruimte?

[10] Waarom volgt dat de vergelijking (1) een unieke oplossing $x \in M_r$ heeft in het interval $(t_0 - r, t_0 + r)$?

2. (a) Toon aan dat, voor genormeerde ruimten X, $\overline{B}_X(0,1)$ compact is als en slechts als X eindig-dimensionaal is. Je mag hierbij steunen op de volgende eigenschap van genormeerde ruimten X:
   Als $Y \leq X$ met $\overline{Y} \neq X$ en $\varepsilon > 0$, dan bestaat $x \in X$ met $\|x\| = 1$ en $d(x, Y) \geq 1 - \varepsilon$.

   (b) Geldt ook: $(\forall R > 0)$ ($\overline{B}_X(0, R)$ is compact) als en slechts als X eindig-dimensionaal is?

3. Toon de karakterisering van compactheid d.m.v. open bedekkingen aan (Borel-Lebesgue eigenschap). Je mag hierbij steunen op de volgende eigenschap:
   Elke open bedekking van een totaal begrensde metrische ruimte heeft een aftelbare deelbedekking.

   Begin bijv. met de volgende eigenschap aan te tonen:
   Een metrische ruimte M is compact als en slechts als elke dalende rij van niet-lege gesloten deelverzamelingen van M een niet-lege doorsnede heeft.

   Opmerking: als een (deel van een) bewijs in de theorie 'als oefening' vermeld staat, dan mag dit ook (zonder verdere uitwerking) vermeld worden.

Oefeningen

1. Verklaar uitvoerig waarom de stappen in de volgende redenering (niet) juist zijn:

   Stelling. Zij M, M' metrische ruimten met M compleet. Dan is iedere continue afbeelding f: $M \to M'$ gelijkmatig continu.

   Bewijs. Zij $(x_n)_n$ een Cauchy-rij in M. Dan is $x_n \to x$ in M. Bijgevolg convergeert ook $f(x_n) \to f(x)$, zodat $(f(x_n))_n$ een Cauchy-rij is in M'. Omdat $(x_n)_n$ willekeurig is, is f gelijkmatig continu. □

2. Geef een voorbeeld van twee samenhangende deelverzamelingen van een metrische ruimte waarvan de doorsnede niet samenhangend is.

3. Zij $\|.\|$ een norm op de ruimte $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ met de eigenschap dat convergentie van een rij in $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ voor $\|.\|$ juist de lokaal gelijkmatige convergentie is.

   (a) Zij $V \subseteq \mathbb{R}$. Toon aan dat $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f(x) = 0, \forall x \in V\}$ een lineaire deelruimte is van $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

   (b) Toon aan dat
   $$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \text{ met } f(x) = 0, \forall x \in [-N, N])(\|f\| < 1).$$
   HINT: ga tewerk uit het ongerijmde en construeer een rij.

   (c) Besluit hieruit dat
   $$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \text{ met } f(x) = 0, \forall x \in [-N, N])(\|f\| = 0).$$

   (d) Besluit hieruit dat $\|.\|$ met de eigenschappen uit de opgave niet bestaat.

4. Zij X een genormeerde ruimte en f een twee keer continu afleidbare afbeelding $X \to \mathbb{R}$. Zij $a, h \in X$. Definieer $g(t) := f(a + th)$, voor elke $t \in \mathbb{R}$. Wegens de Taylor-formule voor g (met sluitterm van tweede orde) bestaat voor $t \in \mathbb{R}$ een $\theta \in (0, 1)$ met
   $$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2} g''(\theta t). \tag{2}$$

   (a) Bereken $g'(t)$ en $g''(t)$.
   HINT: gebruik de kettingregel.

   (b) Kies $t = 1$ in de formule (2) en leid hieruit een Taylor-formule (met sluitterm van tweede orde) af van de vorm
   $$f(a + h) = f(a) + Df \cdots$$

   (c) Controleer je resultaat in het bijzonder geval waarbij $X = \mathbb{R}^2$ door het te vergelijken met de Taylor-formule voor twee keer continu afleidbare afbeeldingen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (cursus Analyse II): voor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bestaat $\theta \in (0, 1)$ waarvoor
   $$f(x, y) = f(0, 0) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(0, 0) + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x, \theta y)$$
   met
   $$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

5. (a) Zij M, M' metrische ruimten en f een continue afbeelding $M \to M'$. Toon aan dat, als f constant is op een dichte deelverzameling van M, dat dan f constant is op heel M.

   (b) Zij f een periodieke afbeelding $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met periode $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (d.w.z. dat $f(x+p) = f(x)$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$). Dan is f trivialerwijze ook mp-periodiek voor iedere $m \in \mathbb{Z}$. Een niet-constante periodieke afbeelding f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan dus op triviale wijze dubbel-periodiek zijn met periodes p_1, p_2 als $p_1/p_2 \in \mathbb{Q}$.
   Toon aan dat een continue afbeelding f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die dubbel-periodiek is met periodes p_1, p_2 met $p_1/p_2 \notin \mathbb{Q}$, noodzakelijk constant is.