Oefeningen Analyse IV

1. Verklaar uitvoerig waarom de aangeduide stappen in de volgende redenering (niet) juist zijn:

Stelling. Zij K een compacte metrische ruimte en f_n een continue afbeelding $K \to \mathbb{R}$, voor elke $n \in \mathbb{N}$. Als $(f_n)_n$ puntsgewijs convergeert op K naar een continue afbeelding $g\colon K \to \mathbb{R}$, dan convergeert de rij ook gelijkmatig.

Bewijs. We mogen aannemen dat $g = 0$ (beschouw desnoods de rij $(f_n - g)_n$) `[1]`. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Vergelijken van het gegeven en het te bewijzen leert dat we quantoren wensen te verwisselen in `[2]`

$$(\forall x \in K)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(|f_n(x)| < \varepsilon).$$

We stellen daarom $U_N := \{x \in K : (\forall n \geq N)(|f_n(x)| < \varepsilon)\}$. Omdat f_n continu zijn, zijn $\{x \in K : |f_n(x)| < \varepsilon\} = f_n^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ open `[3]`, en dus is ook U_N open als doorsnede van open verzamelingen `[4]`. Bijgevolg is $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een open bedekking van K `[5]`. Omdat K compact is en $(U_n)_n$ stijgend is `[6]`, is dus $K \overset{[7]}{\subseteq} U_1 \cup \cdots \cup U_N \overset{[8]}{=} U_N$ voor zekere $N \in \mathbb{N}$. `[9]` $\square$

`[1]` Hoe volgt het algemeen geval uit het geval $g = 0$?

`[2]` Formuleer het te bewijzen zo dat duidelijk is dat quantoren verwisseld moeten worden.

`[3]` Waarom is deze verzameling open?

`[4]` Waarom is U_N een doorsnede van open verzamelingen? Waarom is U_N open?

`[5]` Waarom is $(U_n)_n$ een bedekking van K?

`[6]` Waarom is $(U_n)_n$ stijgend?

`[7]` Waarom is $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_N$?

`[8]` Waarom is $U_1 \cup \cdots \cup U_N = U_N$?

`[9]` Hoe volgt de stelling hieruit?

Oplossingen

1: veronderstel dat het geval $g = 0$ al bewezen is, en neem aan dat $f_n \to g$ puntsgewijs. D.w.z.

$$d(f_n(x), g(x)) = |f_n(x) - g(x)| = d(f_n(x) - g(x), 0) \to 0 \quad \text{als } n \to \infty,$$

voor elke $x \in K$. Bijgevolg is $f_n - g \to 0$ puntsgewijs. Omdat bovendien $f_n - g$ continu is (f_n, g zijn immers continu), kunnen we het al bewezen geval toepassen en besluiten dat $f_n - g \to 0$ gelijkmatig. Analoog betekent dit dat

$$d_\infty(f_n - g, 0) = \|f_n - g\|_\infty = d_\infty(f_n, g) \to 0,$$

zodat $f_n \to g$ gelijkmatig.

2: Gegeven is $(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in K)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(|f_n(x)| < \varepsilon)$.
Te bewijzen is $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in K)(\forall n \geq N)(|f_n(x)| < \varepsilon)$.

3: het invers beeld van een open verzameling (hier $]-\varepsilon, \varepsilon[$) onder een continue afbeelding (hier f_n) is open.

4: $U_N = \bigcap_{n \geq N}\{x \in K : (|f_n(x)| < \varepsilon)\} = \bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$. De doorsnede van een willekeurig aantal open verzamelingen is echter niet noodzakelijk open (voor een eindig aantal geldt dit wel), bijv. $\{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(0, 1/n)$.

5: $(\forall x \in K)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(|f_n(x)| < \varepsilon)$ betekent juist dat $(\forall x \in K)(\exists N \in \mathbb{N})(x \in U_N)$, d.w.z., $K \subseteq \bigcup_{N\in\mathbb{N}} U_N$.

6: Voor elke $N \in \mathbb{N}$ geldt:

$$x \in U_N \iff (\forall n \geq N)(|f_n(x)| < \varepsilon) \Longrightarrow (\forall n \geq N+1)(|f_n(x)| < \varepsilon) \iff x \in U_{N+1}.$$

7: Omdat K compact is, heeft de open bedekking $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een eindige deelbedekking (Borel-Lebesgue).

8: omdat $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stijgend is.

9: er is aangetoond dat $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(K \subseteq U_N)$, d.w.z., $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in K)(x \in U_N)$, d.w.z. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in K)(\forall n \geq N)(|f_n(x)| < \varepsilon)$, d.w.z., $f_n \rightrightarrows 0$ op K.

2. Geef een voorbeeld van een metrische ruimte M en een totaal begrensde rij in M die geen Cauchy-rij is.

Oplossing

Beschouw een metrische ruimte met tenminste twee elementen x, y ($x \neq y$). Dan is de rij $(z_n)_n := (x, y, x, y, x, y, \dots)$ totaal begrensd, want $\{x, y\} \subseteq B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)$ voor elke $\varepsilon > 0$. Ze is geen Cauchy-rij, want kiezen we $0 < \varepsilon < d(x, y)$, dan is $d(z_n, z_{n+1}) = d(x, y) > \varepsilon$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, zodat niet aan de definitie van Cauchy-rij voldaan is voor deze waarde van ε.

3. Zij X, Y genormeerde ruimten en definieer p: $X \times Y \to \mathbb{R}$: $p(x, y) := \|x\|_X + \|y\|_Y$.

   (a) Toon aan dat p een norm is op $X \times Y$

   (b) Toon aan dat de norm p equivalent is met de productnorm $\|(x, y)\|_{X \times Y}$ op $X \times Y$ zoals gedefinieerd in de cursus.

Oplossing

(a1) $p(x, y) = 0 \iff \|x\| + \|y\| = 0$. Door de eigenschappen van een norm zijn $\|x\| \geq 0$ en $\|y\| \geq 0$, zodat

$$\|x\| + \|y\| = 0 \iff \|x\| = \|y\| = 0 \iff x = 0 \;\&\; y = 0 \iff (x, y) = (0, 0).$$

(a2) voor elke $\lambda \in \mathbb{K}$ is

$$p(\lambda(x, y)) = p(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x\| + \|\lambda y\| = |\lambda| \|x\| + |\lambda| \|y\| = |\lambda| (\|x\| + \|y\|) = |\lambda| p(x, y)$$

door de norm-eigenschppen van $\|.\|_X$ en $\|.\|_Y$.

(a3)

$$\begin{aligned} p((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = p(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= \|x_1 + x_2\| + \|y_1 + y_2\| \\ &\leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|y_1\| + \|y_2\| = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_2) \end{aligned}$$

door de driehoeksongelijkheid voor $\|.\|_X$ en $\|.\|_Y$.

(b) Wegens een eigenschap uit de theorie is te bewijzen dat een constante $C > 0$ bestaat zo dat voor elke $(x, y) \in X \times Y$ geldt:

$$p(x, y) \leq C \|(x, y)\| \quad \text{en} \quad \|(x, y)\| \leq C p(x, y).$$

Nu geldt dit voor $C = 2$, want $\|x\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ en $\|y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$, zodat

$$\begin{aligned} p(x, y) = \|x\| + \|y\| &\leq 2 \max(\|x\|, \|y\|) = 2 \|(x, y)\| \\ \|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|) &\leq \|x\| + \|y\| = p(x, y). \end{aligned}$$

4. Toon aan: als een metrische ruimte M eindig veel samenhangende componenten heeft, dan is elke samenhangende component van M open.

Oplossing

We tonen eerst aan dat elke samenhangende component C van M gesloten is.
Inderdaad, C is een samenhangende component, en dus zelf samenhangend. Wegens een eigenschap uit de theorie is elke verzameling U met $C \subseteq U \subseteq \overline{C}$ dan ook samenhangend; i.h.b. is dus $\overline{C}$ zelf samenhangend. Maar C is een maximale samenhangende deelverzameling van M en $C \subseteq \overline{C}$; er volgt dat $C = \overline{C}$, m.a.w. C is gesloten.
Uit het gegeven en het feit dat samenhangende componenten een partitie vormen, volgt dat M de disjuncte unie is van haar samenhangende componenten $C_1, \dots, C_N$. Bijgevolg is een willekeurige samenhangende component

$$C_j = M \setminus \underbrace{(C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_{j-1} \cup C_{j+1} \cup \cdots \cup C_N)}_{\text{eindige unie van gesloten, dus gesloten}}.$$

C_j is dus het complement van een gesloten verzameling, d.w.z. open.

5. Zij $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ open. Zij $(f_n)_n$ een rij van afbeeldingen $\Omega \to \mathbb{C}$. Toon aan dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

   (a) $(f_n)_n$ convergeert lokaal gelijkmatig op Ω

   (b) $(\forall x \in \Omega)$ $(\exists U$ omgeving van $x)$ $((f_n)_n$ convergeert gelijkmatig op $U)$.

   Oplossing

   $(a) \Rightarrow (b)$: het gegeven betekent dat $(f_n)_n$ gelijkmatig convergeert op elke compacte $K \subseteq \Omega$. Zij $x \in \Omega$. Het volstaat aan te tonen dat x een compacte omgeving K heeft met $K \subseteq \Omega$ (het volstaat dan op die K het gegeven toe te passen). Omdat Ω open is bestaat $r > 0$ zo dat $\overline{B}(x,r) \subseteq \Omega$. Zoals elke gesloten bal in een metrische ruimte is $\overline{B}(x,r)$ gesloten; omdat $\operatorname{diam} \overline{B}(x,r) \leq 2r$, is $\overline{B}(x,r)$ begrensd. Door de karakterisering van compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^m$ is dus $\overline{B}(x,r)$ compact. Omdat $B(x,r) \subseteq \overline{B}(x,r)$ is $\overline{B}(x,r)$ ook een omgeving van x.

   $(b) \Rightarrow (a)$: uit het gegeven volgt dat $(f_n)_n$ puntsgewijs convergeert in heel Ω. We noemen de puntsgewijze limiet f. (Omdat gelijkmatige convergentie ook puntsgewijze convergentie impliceert, zijn de gelijkmatige limieten van $(f_n)_n$ ook gelijk aan f.)
   Methode 1: zij voor elke $x \in \Omega$, U_x een omgeving van x waarover $(f_n)_n$ gelijkmatig convergeert. Uit de definitie van omgeving volgt dat $r_x > 0$ bestaat zo dat $B(x, r_x) \subseteq U_x$. Ook op $B(x, r_x)$ convergeert $(f_n)_n$ gelijkmatig.
   Zij nu K een willekeurige compacte deelverzameling van Ω. We tonen aan dat $f_n \rightrightarrows f$ op K. Omdat $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$, volgt (Borel-Lebesgue) dat $K \subseteq B(x_1, r_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_N, r_{x_N})$ voor zekere $x_1, \ldots, x_N \in K$.
   Als nu $f_n \rightrightarrows f$ op verzamelingen U_1 en U_2, dan is ook $f_n \rightrightarrows f$ op $U_1 \cup U_2$. Zij immers $\varepsilon > 0$ willekeurig. Uit

   $$(\exists N_j \in \mathbb{N})(\forall x \in U_j)(\forall n \geq N)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

   volgt ook dat

   $$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in U_1 \cup U_2)(\forall n \geq N)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon),$$

   want het volstaat $N := \max(N_1, N_2)$ te kiezen.
   Nu weten we al dat $f_n \rightrightarrows f$ op elke $B(x, r_x)$. Inductief volgt dat $f_n \rightrightarrows f$ op $B(x_1, r_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_N, r_{x_N})$. Omdat $K \subseteq B(x_1, r_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_N, r_{x_N})$ is dus ook $f_n \rightrightarrows f$ op K.

   Methode 2: veronderstel uit het ongerijmde dat een compacte $K \subseteq \Omega$ bestaat waarover $(f_n)_n$ niet gelijkmatig convergeert naar f. D.w.z.,

   $$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geq N)(\exists x \in K)(|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon).$$

   Voor die $\varepsilon > 0$ kunnen we dus achtereenvolgens $n_1 \in \mathbb{N}$ kiezen en $x_1 \in K$, $n_2 > n_1$ en $x_2 \in K$, $\ldots$, $n_m > n_{m-1}$ en $x_m \in K$ met $|f_{n_m}(x_m) - f(x_m)| \geq \varepsilon$ voor elke $m \in \mathbb{N}$. Omdat K compact is, bestaat een deelrij $(x_{m_k})_k$ convergent naar zekere $x \in K$. Omdat $f_n \rightrightarrows f$ op een omgeving U van x, bestaat $N \in \mathbb{N}$ zo dat $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$ voor elke $n \geq N$ en voor elke $y \in U$. Omdat $x_{m_k} \to x$, is $x_{m_k} \in U$ voor voldoend grote k. I.h.b. is dus $|f_{n_{m_k}}(x_{m_k}) - f(x_{m_k})| < \varepsilon$ voor voldoend grote k, een strijdigheid.

6. Toon aan dat een deelruimte van een separabele metrische ruimte M zelf separabel is.

   Oplossing

   Door het gegeven bestaat een dichte aftelbare $Q \subseteq M$. Zij $V \subseteq M$ willekeurig. We tonen aan dat V separabel is. We construeren als volgt een aftelbare dichte deelverzameling S van V. (Merk op dat de voor de hand liggende kandidaat $S := Q \cap V$ niet kan voldoen, bijv. als $V = M \setminus Q$.) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ en $q \in Q$ kiezen we

   $$x_{n,q} \in \begin{cases} B(q, 1/n) \cap V, & \text{als } B(q,1/n) \cap V \neq \varnothing \\ V, & \text{als } B(q,1/n) \cap V = \varnothing. \end{cases}$$

   Dan is $S := \{x_{n,q} : n \in \mathbb{N} \text{ en } q \in Q\} \subseteq V$ aftelbaar (want zowel $\mathbb{N}$ als Q zijn aftelbaar). Het volstaat aan te tonen dat S dicht is in V. Zij daartoe willekeurig $x \in V$ en $n \in \mathbb{N}$. Het volstaat aan te tonen dat $B(x, 1/n) \cap S \neq \varnothing$. Omdat Q dicht is in M en $x \in M$, bestaat $q \in B(x, \frac{1}{2n}) \cap Q$. Omdat $B(q, \frac{1}{2n}) \cap V \neq \varnothing$ (x behoort ertoe), is $x_{2n,q} \in B(q, \frac{1}{2n})$. Door de driehoeksongelijkheid is dus $x_{2n,q} \in B(x, 1/n) \cap S$.