Eerste Bachelor Wiskunde
Relaties en Structuren: oefeningen
Frank De Clerck – Jan De Beule
9 september 2011, 14.00

1. Hoeveel personen moet men minstens samenbrengen om zeker te zijn dat er zich onder hen minstens twee personen bevinden die geboren zijn op dezelfde dag van de week en in dezelfde maand?

2. Beschouw het eindig veld $\mathbb{F}_{32} = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{30} \| \alpha^5 + \alpha^2 + 1 = 0\}$, met bijhorende Zech-log tabel $(1 + \alpha^i = \alpha^{\theta(i)})$.

i	$\theta(i)$	i	$\theta(i)$	i	$\theta(i)$	i	$\theta(i)$
0	∞	8	20	16	9	24	15
1	18	9	16	17	30	25	21
2	5	10	4	18	1	26	28
3	29	11	19	19	11	27	6
4	10	12	23	20	8	28	27
5	2	13	14	21	25	29	3
6	27	14	13	22	7	30	17
7	22	15	24	23	12	∞	0

Bepaal alle oplossingen van de vergelijking

$$x^4 + \alpha^{25} x^2 + \alpha^{20} = 0\,.$$

3. Je beschikt over een gewoon kaartspel van 52 kaarten. Je trekt hieruit 5 kaarten, de volgorde is van geen belang.

   (a) Hoeveel mogelijke kaartenvijftallen zijn er die juist één paar gelijkwaardige kaarten bevatten, dus bijvoorbeeld 2 Azen of 2 drieën of 2 Dames? (Let op: drie of vier gelijkwaardige kaarten of twee dergelijke paren worden uitgesloten.)

   (b) Hoeveel mogelijkheden zijn er die minstens één paar van dezelfde waarde bevatten? (Eén paar, twee paren, drie of vier kaarten van dezelfde soort zijn nu allemaal wel toegelaten.)

Vragen 4 en 5: zie ommezijde

4. Beschouw het eindig veld $\mathbb{F}_q$, $q = p^h$, p priem,

$$\mathbb{F}_q = \{\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_{h-1} t^{h-1} \| \lambda_i \in \mathbb{F}_p\} \,.$$

Noteer de groep $\mathbb{F}_q, +$ als G.

Beschouw nu de verzameling $\mathbb{C}_p = \{e^{\frac{2\pi i}{p}}, i = 0 \ldots p{-}1\}$. Samen met de vermenigvuldiging in de complexe getallen is dit een groep, genoteerd H.

(a) Toon aan dat de afbeelding

$$\theta : G \to H : \quad \theta(\lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_{h-1} t^{h-1}) = e^{\frac{2\pi\lambda_0}{p}}$$

een homomorfisme is van G naar H.

(b) Bepaal $\ker\theta$.

(c) Toon aan dat

$$\sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} \beta^\theta = 0$$

5. Stel dat $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Toon aan dat

$$\mathrm{ggd}(m,n) = 1 \Longrightarrow \frac{(m+n-1)!}{m!n!} \in \mathbb{Z}\,.$$

Geef een voorbeeld (d.w.z. twee natuurlijke getallen m en n) waarvoor

$$\mathrm{ggd}(m,n) \neq 1 \text{en } \frac{(m+n-1)!}{m!n!} \notin \mathbb{Z}\,.$$