16.VIII.2010

**Wiskundige Analyse I, theorie (= 60% van de punten)**

- *Beantwoord elk van de vragen I,II,III en IV (niet de onderverdelingen) op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen, bovenaan de eerste bladzijde, uw naam (familienaam in drukletters), studierichting en het Romeinse cijfer van de vraag. Stop de dubbele geruite bladen vanaf II in het dubbele geruite blad I. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*
- *Geen rekenmachine toegestaan.*

---

**Vraag I.**

1. Geef en bewijs de z.g. *integraaltest* voor speciale reeksen van getallen.
2. Pas die regel toe op de convergentie van *hyperharmonische reeksen.*
3. Leid uit die regel de *constante van Euler* af.

**Vraag II.** Bewijs dat een complexe machtreeks met convergentiestraal $R \in \mathbb{R}^+$ termsgewijze afgeleid mag worden. Hierbij mag zonder bewijs gesteund worden op de eigenschap:
*als $a$ en $b$ verschillende complexe getallen zijn met $|a| \leqslant r$ en $|b| \leqslant r$, dan is voor $n = 1, 2, \ldots$*

$$\left| \frac{b^n - a^n}{b - a} - na^{n-1} \right| \leqslant \frac{|b-a|\, r^{n-2} n(n-1)}{2}.$$

**Vraag III.** Formuleer en bewijs de *Extremumstelling van Weierstrass.*

**Vraag IV.**

1. Schrijf een Griekse kleine letter 'èta'.
2. Vul aan:
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \approx \ldots$$

   *Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):*

3. Een afleidbare $f$ in een open interval is strikt stijgend $\iff$ $f' > 0$ in dat interval.
4. $0 = 1 \implies 0 = 2$.
5. Als $f'$ integreerbaar over $]a, b[$ is, dan bestaat $f(b-)$.
6. De reekssom van een convergente Fourierreeks is een continue functie.
7. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 0$.

EINDE THEORIE

*Tijd tot 12.30. Oefeningen: 14.00.*

16.VIII.2010

**Wiskundige Analyse I, oefeningen (= 40% van de punten)**

- *Beantwoord elk van de vragen I,II en III (niet de onderverdelingen) op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen, bovenaan de eerste bladzijde, uw naam (familienaam in drukletters), studierichting en het Romeinse cijfer van de oefening. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*
- *Geen rekenmachine toegestaan.*

---

**Vraag I.**

1. Geef een reeks van *cosinussen* die voor $0 < x < 2$ convergeert naar de functie $f(x) = x$.
2. Geef de reekssom in $x = 0$ en $x = 2$. Leg uit.
3. Geef de waarde van $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots$.

1. Om cosinussen te krijgen moet $x$ *even* uitgebreid worden over $]-2, 2[$. Dan is, met $L = 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\ &= \left[x\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\,dx = 0 - 0 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{voor } n > 0 \text{ en even} \\ -\frac{8}{n^2\pi^2} & \text{voor } n > 0 \text{ en oneven.} \end{cases} \end{aligned}$$

en

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2.$$

De Fourierreeks is dus

$$1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right)$$

Zij convergeert naar $x$ (continu, dus = gemiddelde sprongwaarde) voor $0 < x < 2$.

2. Voor de uitgebreide functie is $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = 0$ en $\frac{f(2+)+f(2-)}{2} = 2$. De reekssom is dus 0 voor $x = 0$, en 2 voor $x = 2$.

3. Voor $x = 0$ komt er $0 = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right)$, waaruit $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$.

**Vraag II.** Vind, door bekende reeksen te manipuleren (dus niet door vier keer af te leiden) de Taylorbenadering (centraal punt $x = 0$) van

$$\frac{1}{\sqrt{\cos x}} \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

tot en met $x^4$. Voor $|x|$ klein genoeg is

$$\frac{1}{\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}} = \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)^2 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + \dots + \frac{3}{2^3}\left(\frac{x^4}{2^2} - \dots\right) + \dots = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{7x^4}{96} + \dots.$$

**Vraag III.** Los het volgende beginwaardenvraagstuk op:

$$\begin{cases} y'' + 25\, y = 4 \cos 3x \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Schrijf de oplossing zó, dat een product van twee sinussen te zien is.

De homogene vergelijking heeft kenmerkende drieterm $\lambda^2 + 25$, met wortels $\pm 5i$. De oplossingen van de homogene vergelijking zijn dus lineaire combinaties van de complexe oplossingen $e^{5ix}, e^{-5ix}$, of nog: lineaire combinaties van de reële oplossingen $\cos 5x, \sin 5x$. Voor het rechterlid is $a = 0$ (want de exponentiële in het rechterlid is $e^{0x}$) en $b = 3$. Omdat $a + ib = 3i$ niet tussen de wortels van de kenmerkende drieterm staat, bestaat er een oplossing die de gedaante van het rechterlid heeft. Er komt

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= A \cos 3x + B \sin 3x \\ \Psi'(x) &= -3A \sin 3x + 3B \cos 3x \\ \Psi''(x) &= -9A \cos 3x - 9B \sin 3x \end{aligned}$$

en na substitutie:

$$-9A \cos 3x - 9B \sin 3x + 25(A \cos 3x + B \sin 3x) = 4 \cos 3x,$$

waaruit $16A = 4, 16B = 0$, en dus $A = \frac{1}{4}, B = 0$. Voor de algemene oplossing hebben we

$$\varphi(x) = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + \frac{1}{4} \cos 3x$$

$$\varphi'(x) = -5c_1 \sin 5x + 5c_2 \cos 5x - \frac{3}{4} \sin 3x$$

en, met de gegeven beginvoorwaarden,

$$\varphi(0) = c_1 + \frac{1}{4} = 0$$
$$\varphi'(0) = 5c_2 = 0,$$

waaruit $c_1 = -\frac{1}{4}, c_2 = 0$. De oplossing is dus

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4}\cos 5x + \frac{1}{4}\cos 3x = -\frac{1}{4}(\cos 5x - \cos 3x) = -\frac{1}{4}(-2\sin 4x \sin x) = \frac{1}{2}\sin x \sin 4x.$$

EINDE EXAMEN

*Tijd tot 18.00.*