

1. De veralgemeende Fourierreeks.

Zij  $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$  een orthonormale familie in de inproduktruimte  $\mathcal{PC}([a, b], \mathbb{R})$  en zij  $f$  een functie in  $\mathcal{PC}([a, b], \mathbb{R})$ . Bereken voor welke coëfficiënten  $(c_i)_{i=1\dots n}$  de afstand  $\|f - \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i\|$  minimaal is en geef de minimale waarde.

2. Gewone differentiaalvergelijkingen 1.

Bespreek de integratie van een algemene lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

waarbij  $P$  en  $Q$  gedefinieerd en continu zijn over een gemeenschappelijk interval  $I$ . Los als toepassing de vergelijking

$$y' - 3y = x$$

op  $(x \in \mathbb{R})$ .

3. Gewone differentiaalvergelijkingen 2.

Geef in reële vorm alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y^{(4)} + y = 0.$$

4. De Laplace transformatie.

(a) Geef de Laplace getransformeerden van de volgende functies en zeg voor welke waarden van  $s$  deze Laplacegetransformeerden gedefinieerd zijn:

1.  $e^{ax}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
2.  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ .
3.  $\sin(bx)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ .

(b) Geef de inverse Laplacegetransformeerden van de volgende functies:

1.  $\frac{s}{s^2+b^2}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$
2.  $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ .

(c) Geef met bewijs de formule voor de Laplacegetransformeerde  $\mathcal{L}[y^{(n)}(x)](s)$  voor een functie  $y(x)$  die voldoende afleidbaar is en die samen met een voldoende aantal afgeleiden van exponentiële orde is.

Gent, 13 januari 2011

Prof. W. Govaerts

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple! Probeer de door Maple gegeven uitkomsten altijd zoveel mogelijk te vereenvoudigen.

### 1. Machtreksen

Geef met bewijs de convergentiestraal, het convergentieinterval en het convergentiegebied van de volgende machtreksen:

- $\sum_n n x^n$
- $\sum_n n(2x - 1)^n$
- $\sum_n n^{\frac{1}{n}} x^n$

### 2. Meervoudige integralen.

Bereken de drievoudige integraal:

$$\int \int \int_V x^2 y dx dy dz,$$

over het gebied  $V$  in de  $(x, y, z)$  - ruimte gegeven als:

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq x^2, x^2 \leq 1 - z^2\}.$$

### 3. Differentiaalvergelijkingen.

Bereken de differentiaalvergelijking van de schaar krommen die bestaat uit alle cirkels in het vlak met straal 2.

### 4. De Laplacetransformatie.

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' - 9y = x + 2; y(0) = -1, y'(0) = 1.$$

1. Pas de Laplacetransformatie toe om een algebraïsche vergelijking in  $\mathcal{L}[y(x)](s)$  te bekomen.
2. Los deze vergelijking op naar  $\mathcal{L}[y(x)](s)$  en ontbind het rechterlid in partieelbreuken.
3. Bereken  $y(x)$  door toepassing van de inverse Laplacegetransformeerde op het rechterlid.

Gent, 13 januari 2011

Prof. W. Govaerts