Theorie-examen Kwantumveldentheorie
27 januari 2011

1. **Canonische kwantizatie van het reëel Klein-Gordon veld.**

   Gegeven:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left[a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} + h.c. \right]$$

   Gevraagd:

   (a) Gebruik theorema van Noether voor translaties in ruimte en tijd om de Hamiltoniaan H en de impuls $\vec{p}$ van de theorie af te leiden.

   (b) Diagonaliseer H en $\vec{p}$ en toon aan dat de theorie spin 0 deeltjes beschrijft die aan de Einstein-relatie voldoen. Indien (a) niet lukt:

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \left(\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2 \phi^2 \right)$$

$$\vec{p} = - \int d^3x \, \pi \vec{\nabla} \phi$$

2. Leid de Lagrangiaan en de bewegingsvergelijkingen af voor SU(N) Yang-Mills theorie.

   Gegeven:

$$\psi' = U(x)\psi$$

$$A'_\mu = U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} \partial_\mu U U^\dagger .$$

   Bewijs in uw afleiding ook dat

   (a) $\frac{i}{g}\partial_\mu U U^\dagger$ hermitisch en spoorloos is

   (b) de covariante afgeleide in de adjoint representatie wordt gegeven door:

$$\left(\mathcal{D}^A \xi \right)^a = \partial_\mu \xi^a - g f_{abc} A^b_\mu \xi^c$$

Oefeningenexamen
Kwantumveldentheorie 27 januari 2011

Beschouw het proces waarbij een elektron en een positron annihileren in twee fotonen:

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \to \gamma(k_1) + \gamma(k_2),$$

waarbij tussen haakjes telkens de notatie voor het viermomentum van het deeltje is gegeven.
In geval van tijdsgebrek: De hoofdvraag is vraag 3. Om deze op te lossen heb je enkel de Feynmandiagrammen uit vraag 1 nodig. Vraag 2 kan nadien volledig apart opgelost worden.

1. Teken de Feynmandiagrammen.
2. (a) Geef voor één van de Feynmandiagrammen uit vraag 1 de uitdrukking voor $\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2$ in de vorm
$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = \cdots Tr\{\cdots\}.$$
   (b) Werk uit:
$$Tr\left(\not{p}_2\gamma^\nu p_1^\mu \not{p}_1\gamma_\nu p_{1\mu}\right).$$
3. (a) Toon aan dat de werkzame doorsnede voor dit proces in het c.o.m.-frame gegeven wordt door
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{c.o.m.} = -\frac{\alpha^2}{4Ep}\left(\frac{E^2+p^2\cos^2\theta}{m^2+p^2\sin^2\theta} + \frac{2m^2}{m^2+p^2\sin^2\theta} - \frac{2m^4}{(m^2+p^2\sin^2\theta)^2}\right)$$
met E, p en m respectievelijk de energie, de grootte van het momentum en de massa van het inkomend elektron, θ de verstrooiingshoek die het foton $\gamma(k_1)$ maakt met de botsingsas, en $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.
Maak hiertoe gebruik van het gegeven dat
$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = 2e^4\left[\frac{P\cdot K'}{P\cdot K} + \frac{P\cdot K}{P\cdot K'} + 2m^2\left(\frac{1}{P\cdot K} - \frac{1}{P\cdot K'}\right) + m^4\left(\frac{1}{P\cdot K} - \frac{1}{P\cdot K'}\right)^2\right]$$
voor het proces van Compton verstrooiing
$$e^-(P) + \gamma(K) \to e^-(P') + \gamma(K').$$
   (b) Geef de uitdrukking voor $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{c.o.m.}$ in de limiet van hoge energie $E \gg m$.