

Examen Theoretische Mechanica (juni 2010)

- I. Stel de formules op voor de componenten van de snelheid van een deeltje in cilindercoördinaten en in sferische coördinaten.
- II. Onderzoek de beweging van een geladen deeltje in een uniform elektromagnetisch veld (magnetisch veld \mathbf{B} volgens de z -as).
- (i) Stel de bewegingsvergelijkingen op en integreer ze indien $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ en $\mathbf{v}(0) = \mathbf{e}_z$.
- (ii) Beschrijf de aard van de beweging van het leidend centrum voor dit geval, in de veronderstelling dat de lading negatief is en $E_z > 0$.
- III. Een deeltje met massa m beweegt in een vlak onder invloed van de aantrekkende centrale kracht met grootte $\mu m/r^3$ (met μ een positieve constante). Uitgedrukt in poolcoördinaten (r, θ) wordt de beginpositie A van het deeltje op $t = 0$ bepaald door $\theta_0 = 0$ en $r_0 = a$. De beginsnelheid \mathbf{v}_0 sluit een hoek van $\pi/4$ in met de vector \mathbf{AO} en heeft lengte $\sqrt{\mu}/a$.
- (i) Bereken de componenten van de beginsnelheid in poolcoördinaten en toon aan dat de constante lengte L van het impulsmoment gegeven wordt door $L = m\sqrt{\mu/2}$.
- (ii) Toon aan dat de gereduceerde differentiaalvergelijking voor r daarmee te schrijven is in de vorm

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{2r^3},$$

en bereken de constante waarde E van de energie-integraal voor deze beweging.

(iii) Maak een schets van de grafiek van de potentiaal voor de gereduceerde vergelijking. Wat besluit je uit de waarde van E omtrent de aard van die beweging.

BONUSVRAAG: Maak gebruik van de energie-integraal om een differentiaalvergelijking op te stellen voor r in functie van θ en integreer ze.

- IV. Een homogene bol met middelpunt O heeft straal a en massa M .
- (i) Bereken de componenten van de traagheidstensor om O en van de traagheidstensor om een randpunt A van de bol. We leggen de z -as volgens de verbindinglijn van A naar O . Leg tevens kort uit waarom de assen die je kiest voor de berekening van $I^{(A)}$ hoofdtraagheidsassen zijn.
- (ii) Bereken de massa M' van een bol met dezelfde dichtheid, maar straal $a/2$.
- (iii) Beschouw nu het star lichaam dat ontstaat door uit de oorspronkelijke bol met straal a de bol met straal $a/2$ weg te snijden, die AO als middellijn heeft. Bereken voor dit lichaam eveneens de componenten van de traagheidstensor om O (in functie van M en a).