

1. Integralen.

(a) De substitutieregel voor integratie heeft betrekking op de volgende formule:

$$\int_a^b f(\Phi(x))D\Phi(x)dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x)dx$$

Geef de voorwaarden waaraan  $f$ ,  $\Phi$ ,  $a$ , en  $b$  moeten voldoen en bewijs de regel.

(b) Geef primitieven van de volgende functies:

1.  $2^x$
2.  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  ( $x \in ]-1, +1[$ )
3.  $\operatorname{ch} x$  waarbij  $x \in \mathbb{R}$ .
4.  $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$  waarbij  $x \in \mathbb{R}$ .
5.  $\frac{1}{1+x^2}$  waarbij  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Rijen en reeksen van reële functies.

Geef en bewijs de verhoudingstest van D'Alembert voor machtreeksen.

3. Gewone differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$x^2 y'' + xy' + y = b(x), \tag{1}$$

waarbij  $b(x)$  een continue functie is die gedefinieerd is over  $\mathbb{R}$ .

(a) Wat kunnen de existentiestellingen verzekeren over het bestaan van oplossingen van deze differentiaalvergelijking?

(b) Onderstel dat  $b(x)$  een continue afgeleide heeft in  $]0, 1[$ . Kunt u dan iets meer zeggen over de afleidbaarheidseigenschappen van de oplossingen van (1) in  $]0, 1[$ ?

4. Gewone differentiaalvergelijkingen.

(a) Geef in reële vorm alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y^{(4)} + y = 0.$$

(b) Geef in het bijzonder alle oplossingen die voldoen aan

$$y(0) = 1, Dy(0) = 2, D^2y(0) = 3, D^3y(0) = 4.$$

Gent, 13 januari 2010

Prof. W. Govaerts

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple! Probeer de door Maple gegeven uitkomsten altijd zoveel mogelijk te vereenvoudigen.

### 1. Machtreeksen

Geef met bewijs de convergentiestraal, het convergentie-interval en het convergentiegebied van de volgende machtreeksen:

- $\sum_n n x^n$
- $\sum_n n(2x - 1)^n$
- $\sum_n n^{\frac{1}{5}} x^n$

### 2. Fourierreeksen

Beschouw de functie  $f$  die bepaald is door

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x, & \forall x \in [0, 1] \\ &= 4 - 2x, & \forall x \in ]1, 2[ \\ &= 0 & \forall x \in [-2, 0] \end{aligned}$$

- Geef de bijbehorende Fourierreeks met hoofdperiode 4.
- Geef afzonderlijk de even en de oneven coëfficiënten van de reeksontwikkeling.
- Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie  $f$  in elk punt van  $[0, 2]$ ? Geef de reden waarom of waarom niet.

### 3. Meervoudige integralen.

Integreer de functie

$$f(x, y, z) \equiv x^2$$

over de bol  $B$  met middelpunt in de oorsprong van het  $(x, y, z)$ - assenstelsel en met straal 2.

### 4. Differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de differentiaalvergelijking (DV)

$$y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0.$$

- Geef de karakteristieke vergelijking (KV) van deze DV.
- Wat zijn de wortels van de KV?

- c. Wat is de algemene oplossing van de DV?  
 d. Welke oplossing van de DV voldoet aan  $y^{(3)}(0) = 1, y^{(2)}(0) = 0, y'(0) = 0, y(0) = 0$ ?

Gent, 13 januari 2010

Prof. W. Govaerts

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple! Probeer de door Maple gegeven uitkomsten altijd zoveel mogelijk te vereenvoudigen.

### 1. Machtreeksen

Geef met bewijs de convergentiestraal, het convergentie-interval en het convergentiegebied van de volgende machtreeksen:

- $\sum_n n^2 x^n$
- $\sum_n n(3x - 1)^n$
- $\sum_n n^{\frac{1}{2}} x^n$

### 2. Fourierreeksen

Beschouw de functie  $f$  die bepaald is door

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 4, \quad \forall x \in [-2, -1] \\ &= -2x, \quad \forall x \in ]-1, 0[ \\ &= 0 \quad \forall x \in [0, 2] \end{aligned}$$

- Geef de bijbehorende Fourierreeks met hoofdperiode 4.
- Geef afzonderlijk de even en de oneven coëfficiënten van de reeksontwikkeling.
- Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie  $f$  in elk punt van  $[0, 2]$ ? Geef de reden waarom of waarom niet.

### 3. Meervoudige integralen.

Integreer de functie  $f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z$  over de cylinder  $C$  waarvan de basis de schijf is in het  $(x, y)$ -vlak met middelpunt in de oorsprong en met straal 2 en de hoogte 2 is.

### 4. Differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de differentiaalvergelijking (DV)

$$y^{(4)} - 10y^{(3)} + 35y'' - 50y' + 24y = 0.$$

- Geef de karakteristieke vergelijking (KV) van deze DV.
- Wat zijn de wortels van de KV?
- Wat is de algemene oplossing van de DV?
- Welke oplossing van de DV voldoet aan  $y^{(3)}(0) = 1, y^{(2)}(0) = 0, y'(0) = 0, y(0) = 0$ ?

Gent, 13 januari 2010

Prof. W. Govaerts

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple! Probeer de door Maple gegeven uitkomsten altijd zoveel mogelijk te vereenvoudigen.

### 1. Machtrekken

Geef met bewijs de convergentiestraal, het convergentie-interval en het convergentiegebied van de volgende machtrekken:

- $2^n x^n$   $\leq$   $\bullet \Sigma_n (3 + \sin n)n^2 x^n \leq 4^n x^n$
- $\Sigma_n n(4x - 1)^n$
  - $\Sigma_n n^{\frac{1}{n}} x^n$

### 2. Fourierreeksen

Beschouw de functie  $f$  die bepaald is door

$$f(x) = 1 - x^2, \forall x \in [-1, +1]$$

- Geef de bijbehorende Fourierreeks met hoofdperiode 2.
- Geef afzonderlijk de even en de oneven coëfficiënten van de reeksontwikkeling.
- Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie  $f$  in elk punt van  $[-1, 1]$ ? Geef de reden waarom of waarom niet.

### 3. Meervoudige integralen.

Integreer over een bol  $B$  met straal 2 het kwadraat van de afstand tot het middelpunt van de bol.

### 4. Differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de differentiaalvergelijking (DV)

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - 3y' + 2y = 0.$$

- Geef de karakteristieke vergelijking (KV) van deze DV.
- Wat zijn de wortels van de KV?
- Wat is de algemene oplossing van de DV?
- Welke oplossing van de DV voldoet aan  $y^{(3)}(0) = 1, y^{(2)}(0) = 0, y'(0) = 0, y(0) = 0$ ?

Gent, 13 januari 2010

Prof. W. Govaerts

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple! Probeer de door Maple gegeven uitkomsten altijd zoveel mogelijk te vereenvoudigen.

### 1. Machtrekken

Geef met bewijs de convergentiestraal, het convergentie-interval en het convergentiegebied van de volgende machtrekken:

- $\sum_n (2 + \cos n)n^2 x^n$
- $\sum_n n(5x - 1)^n$
- $\sum_n n^{\frac{1}{2}} x^n$

### 2. Fourierreeksen

Beschouw de functie  $f$  die bepaald is door

$$f(x) = 3 - x, \forall x \in [0, 3]$$

- Geef de bijbehorende Fouriercosinusreeks met hoofdperiode 6.
- Geef afzonderlijk de even en de oneven coëfficiënten van de reeksontwikkeling.
- Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie  $f$  in elk punt van  $[0, 3]$ ? Geef de reden waarom of waarom niet.

### 3. Meervoudige integralen.

Integreer over een bol  $B$  met straal 2 het kwadraat van de afstand tot een van de punten van het oppervlak van de bol.

### 4. Differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de differentiaalvergelijking (DV)

$$y^{(4)} + 3y'' + 2y = 0.$$

- Geef de karakteristieke vergelijking (KV) van deze DV.
- Wat zijn de wortels van de KV?
- Wat is de algemene oplossing van de DV?
- Welke oplossing van de DV voldoet aan  $y^{(3)}(0) = 1, y^{(2)}(0) = 0, y'(0) = 0, y(0) = 0$ ?

Gent, 13 januari 2010

Prof. W. Govaerts