Examen 1^e Kand. Wis- en Natuurkunde 11/09/2003

1. Als V_1, V_2 eindigdimensionale deelruimten zijn van een vectorruimte V, dan zijn $V_1 \cap V_2$ en $V_1 + V_2$ ook eindigdimensionaal en er geldt

$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

Geef een bewijs.

2. Bewijs dat twee eindigdimensionale vectorruimten V, W over een veld K isomorf zijn als en slechts als ze dezelfde dimensie hebben, i.e. $\dim V = \dim W$.

3. Stel dat x een willekeurige vector is in een vectorruimte V met basissen $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ en $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ z.d. $x = \sum x_i e_i = \sum \bar{x}_i \bar{e}_i$.
Bewijs dat er een inverteerbare matrix C bestaat waarvoor geldt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

Analyse I — 8 september 2003

(THEORIE telt voor 63%, OEFENINGEN voor 37%.
Dit zijn de verhoudingen van het aantal lessen.)

De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden.

---

(1) Bewijs de twee hoofdstellingen van de integratie, en van elk ook het Bijzonder Geval.

(2)
(i) Formuleer en bewijs de 'Integraaltest van Cauchy' (convergentieregel voor reeksen).
(ii) Onderzoek daarmee de convergentie van hyperharmonische reeksen.
(iii) Definieer de 'constante van Euler'.

(3)
(i) vul aan (ZONDER BEWIJS) $n! \approx \ldots$ (formule van Stirling)
(ii) formuleer (ZONDER BEWIJS) de 'M-test van Weierstrass'
(iii) geef (ZONDER BEWIJS) de reeksontwikkeling van $\cos x$
(iv) geef (ZONDER BEWIJS) de reeksontwikkeling van e^x
(v) geef (ZONDER BEWIJS) alle oplossingen $\zeta = \ldots$ van de vergelijking $\zeta^n = x_0 + iy_0$.

Eerste Kandidatuur Wis- en Natuurkunde
Oefeningen Analyse I deel 1
9 september 2003

- Schrijf op elk blad uw naam en stamnummer.
- *Veel succes!*

1. Bereken $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n + a^n}}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Bereken $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n - a^n}}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. Bespreek de convergentie van de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{6}{n(\ln n)^2}$