Examen Analyse 2 : Theorie. (15 januari 2009)

1. Integralen.

a. Geef de definitie van de oneigenlijke integraal van een continue functie f over een interval $]\alpha, \beta[$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\alpha < \beta$. Als toepassing hierop, bespreek het geval waarbij $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$ en de functie van de vorm $f(x) = x^p$ is voor $p \in \mathbb{R}$.

b. Geef primitieven van de volgende functies:

1. 2^x
2. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \in]-1,+1[)$
3. $\operatorname{ch} x$ waarbij $x \in \mathbb{R}$.
4. $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ waarbij $x \in \mathbb{R}$.
5. $\frac{1}{1+x^2}$ waarbij $x \in \mathbb{R}$.

2. Rijen en reeksen van reële functies.

Geef en bewijs de Maclaurinontwikkeling van de logaritmische functie gedefinieerd door $f(x) = \ln(1+x)$. Geef expliciet de convergentiestraal en het convergentieïnterval.

3. Gewone differentiaalvergelijkingen.

Bewijs de volgende stelling: Stel Φ_1 en Φ_2 twee oplossingen over een interval I van de DV

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Als: $(\forall i \in \{0,1,2\})(a_i \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}))$,
En: $(\forall x \in I)(a_0(x) \neq 0)$,
Dan: $(\forall x \in I)(W(\Phi_1, \Phi_2)(x) \neq 0) \vee (\forall x \in I)(W(\Phi_1, \Phi_2)(x) = 0)$

4. Partiële differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de eendimensionale golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Geef met bewijs de algemene vorm van de oplossingen van deze vergelijking die van het type "reizende golf" zijn. Als toepassing, beschrijf de tijdsevolutie van een oneindige snaar die op het ogenblik $t = 0$ met het profiel

$$\phi(x) = \frac{1}{1+8x^2}$$

uit een bewegingloze toestand losgelaten wordt.

Gent, 15 januari 2009

Prof. W. Govaerts