

Examen Theoretische Mechanica (juni 2009)

- I. Beschouw een vast en een bewegend referentiestelsel voor de Euclidische ruimte E .
- (i) Stel de algemene formules op voor het verband tussen absolute en relatieve snelheid en versnelling van een bewegend punt (het concept *ogenblikkelijke rotatievector* gekend zijnde).
 - (ii) Leid daaruit het verband af tussen de snelheden van twee punten P en Q van een starre beweging.
 - (iii) Geef een voorbeeld van een onderwerp binnen de theorie van de beweging van starre lichamen, waarbij op essentiële wijze gebruik wordt gemaakt van de eigenschap uit punt (ii). Een korte uitleg volstaat.
- II. (i) Geef voor een stelsel van N deeltjes de definitie van: het massamiddelpunt C , het totaal lineair moment $\mathbf{P}(t)$, het impulsmoment $\mathbf{L}_O(t)$ om het referentiepunt O , de kinetische energie $T(t)$.
- (ii) Toon aan, vertrekkend van de algemene bewegingsvergelijkingen, dat het massamiddelpunt beweegt als een punt waarin de totale massa van het stelsel is geconcentreerd en dat onderworpen is aan de som van alle uitwendige krachten.
 - (iii) Geldt een dergelijke eigenschap ook voor de beweging van starre lichamen. Verklaar!
- III. Een deeltje met massa m beweegt in een vlak, onder invloed van: 1) een centrale kracht $\mathbf{F} = -a \mathbf{r}$, met $a > 0$; 2) een wrijvingskracht evenredig met de snelheid, $\mathbf{G} = -b \mathbf{v}$ met $b > 0$.
- (i) Stel de geprojecteerde bewegingsvergelijkingen op in poolcoördinaten.
 - (ii) Bepaal $r(t)$ indien gegeven is dat het deeltje op $t = 0$ vertrekt in een punt van de poolas, op afstand r_0 van de oorsprong, en tijdens zijn beweging op elk tijdstip een constante hoeksnelheid $\dot{\theta} = \omega$ heeft.
 - (iii) Toon tenslotte aan dat

$$\omega^2 = \frac{a}{m} - \frac{b^2}{4m^2}.$$

- IV. Aan een homogene staaf AB met massa M en lengte 2ℓ is in het eindpunt A een puntdeeltje met massa m bevestigd. Het geheel is onderworpen aan de zwaartekracht, kan in een *vast verticaal vlak* bewegen, en wel zodanig dat het punt A gebonden is om te bewegen langs een *gladde horizontale rechte*. Noem α de hoek die de staaf insluit met de neerwaartse verticale.
- (i) Bepaal de ligging van het massamiddelpunt C van het stelsel op de staaf.
 - (ii) Schrijf de vectoriële bewegingsvergelijking neer waaraan het punt C zal moeten voldoen en projecteer deze op goed gekozen assen.
 - (iii) Indien de staaf vanuit rust vertrekt, met een beginwaarde α_0 voor de hoek α , toon dan aan dat C zich enkel verticaal zal verplaatsen en dat voor de absolute waarde van de snelheid van C zal gelden:

$$v_C^2 = \left(\frac{M\ell}{M+m} \sin \alpha \right)^2 \dot{\alpha}^2.$$