

Examen Formele Talen, Automaten en Complexiteit, groep D

23 juni 2008

Theorie

1. Neem

$$L = a^{2^n} : n \in \mathbb{N}.$$

We beweren dat L niet context-vrij is. We redeneren als volgt:

Zij m het pompend getal vervolgens het pompend lemma voor contextvrije talen. Stel $w = uvxyz = a^{2^{m+1}}$ met $|vxy| \leq m$ en $|vy| \geq 1$. Neem zonder verzwakking aan dat $\lambda = x, v = a, y = b, u = a^{2^m}$ en $z = a^{2^m}$. Dan geldt er voor alle i dat $uv^{2^i}xy^{2^i}z = a^{2^{m+i+2}} \in L$ in contradictie met het pompend lemma.

Bespreek deze redenering regel voor regel en haal alle foutieve redeneringen eruit.

2. (a) *Bespreek de volgende bewering en haal alle foutieve redeneringen eruit.* Bewering: De recursief opsombare talen zijn onder complementen afgesloten. Bewijs: Zij $L = L(M)$. Verwissel nu eindtoestanden en niet-eindtoestanden in M en noem de nieuwe Turingmachine M' . Dan geldt $\Sigma^* \setminus L = L(M')$
(b) Voor welke klassen van talen kan men het voorgaande bewijs in principe wel toepassen en voor welke niet? Het is genoeg in beide gevallen twee klassen aan te geven.
3. Het overdekkingsprobleem SETPARTITION voor verzamelingen is het volgende probleem:
Gegeven: een eindige verzameling M , een reeks $T_1, \dots, T_k \subseteq M$ en een natuurlijk getal $n \leq k$.
Vraag: Bestaat er een keuze van n verschillende indices $i_1, \dots, i_n \leq k$ met $M = T_{i_1} \cup \dots \cup T_{i_n}$?
(a) Toon aan dat $3SAT \leq_p$ SETPARTITION
(b) Toon aan dat SETPARTITION NP -volledig is, waarbij mag jij mag aannemen dat $3SAT$ NP -volledig is en dat SETPARTITION $\in NP$.

Hint voor de eerste tak: Stel $F = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m$ waarbij F m clausules heeft en n variabelen x_1, \dots, x_n . Stel $M := \{1, 2, \dots, m + n\}$. Stel

$$T_i := \{j : x_i \text{ treedt in clausule } \varphi_j \text{ op}\} \cup \{m + i\}$$

en

$$T'_i := \{j : \neg x_i \text{ treedt in clausule } \varphi_j \text{ op}\} \cup \{m + i\}.$$

Neem de reeks verzamelingen $T_1, T'_1, \dots, T_n, T'_n \subseteq M$. Toon aan dat F consistent is als er $i_1, \dots, i_n \leq k$ bestaat met $M = T_{i_1} \cup \dots \cup T_{i_n}$.

Oefeningen

1. Construeer voor de volgende taal een edh:

$$L = \{a^n b^m : n \leq 4, m > 3\}$$

2. Geef voor de volgende taal met alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ een regulieren uitdrukking r en bewijs dat die taal gelijk is aan $L(r)$:
De taal van alle zinnen die beginnen met aba.

3. Geef voor de volgende taal een context-vrije grammatica:

$$L = \{a^n b^m : 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$$

4. Plaats de volgende taal in de Chomsky Hiërarchie (figuur 11.3 in het boek).
Bewijs uw bewering.

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* : n_a(w) = 3, n_b(w) = n_c(w)\}$$

5. Geef een Turing machine die de volgende functie berekent:

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$$