

Wiskundige Analyse I, theorie
(= 60% van de punten)

(De bewijzen hoeven niet langer of explicieter te zijn dan in de cursus, en alles wat voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden.)

Vraag 1.

1. Formuleer (niets bewijzen) het *kenmerk van Darboux* voor integreerbaarheid
2. Teken op één figuur: de beeldlijn van een functie f die zowel onder als boven de x -as komt, die van f^+ en die van f^- .
3. BEWIJS: als f integreerbaar is, dan ook f^+ . Maak ook de bijhorende figuur.
4. BEWIJS de driehoeksongelijkheid voor integralen, eerst het geval waarbij de ondergrens in de integraal hoogstens de bovengrens is, dan het geval waarbij de ondergrens groter is dan de bovengrens.

Vraag 2.

1. Formuleer (niets bewijzen) de convergentiestelling voor de Fourierreeks van 2π -periodieke functies
2. Geef de definitie van de eigenschap die in de opgave van die stelling genoemd wordt naast de periodiciteit.
3. BEWIJS die stelling.

Vraag 3.

1. (Niets bewijzen) Geef de formele definitie, met alle kwantoren erbij, van *puntsgewijze convergentie* en van *gelijkmatige convergentie* van een rij functies.
2. Formuleer en BEWIJS de M-test van Weierstrass voor *reeksen*.

Vraag 4.

1. (Niets bewijzen of uitleggen.) Geef de meetkundige reeks en zeg wanneer ze convergeert
2. (Niets bewijzen of uitleggen.) Geef de binomiaalreeks en zeg wanneer ze convergeert
3. (Niets bewijzen of uitleggen.) Geef de definitie van *onderlimiet van een rij*
4. (Niets bewijzen of uitleggen.) Geef de oplossing van $y'(x) + a(x)y(x) = R(x)$
5. (Niets bewijzen of uitleggen.) Beantwoord met JA of NEEN:
 - (a) als $a_n \rightarrow 0$, dan is $\sum a_n$ convergent
 - (b) een discontinue functie f kan integreerbaar zijn
 - (c) elke afgeleide functie f' is integreerbaar
 - (d) elke afleidbare functie is continu
 - (e) een machtreeks convergeert gelijkmatig in haar convergentieschijf $B(0, R)$

Examen oefeningen Wiskundige Analyse I
1ste Bachelor Wiskunde en 1ste Bachelor Fysica en Sterrenkunde UGent
Academiejaar 2005-2006

"Don't ask me, 'cause I don't know why, but it's like that and that's the way it is."

Run DMC

- I Schrijf elke vraag op een apart blad.
- II Becommentarieer uw werkwijze.
- III Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.
- IV Schrijf op elk net blad uw naam en richting.

Veel succes!

vraag 1 Bepaal de meest algemene oplossing van:

$$(x^2 - 1)y'' + (1 - x)y' - (x^2 - x)y = e^x(x^3 + x^2 - x - 1)$$

vraag 2 Bepaal de convergentie (betrekkelijk of absoluut) van volgende reeks:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\tan(n\pi + \frac{1}{n})}{n^2}$$

Aanwijzing: Bepaal het verloop van de functie $\frac{\tan(1/x)}{x^2}$.

vraag 3 Beschouw volgende functie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{1-x}{2} & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Construeer een reeks van cosinussen die over $[0, 1]$ samenvalt met $f(x)$.
- (b) Wat gebeurt er in de eindpunten?
- (c) Teken de grafiek van de genormaliseerde periodieke uitbreiding.