Examen Theoretische Mechanica (juni 2006)

I. Beschouw een deeltje met massa m, onderworpen aan de krachtwet $\mathbf{F} = (-k/r^2)\,\mathbf{e}_r$.

(i) Leid uit de vectoriële bewegingsvergelijking het constant zijn van het impulsmoment $\mathbf{L}_O$ en van de Laplace-Runge-Lenz vector $\mathbf{R}$ af. Leg uit hoe je die kennis zult gebruiken in de beschrijving van de baan van het deeltje.

(ii) Definieer de constante e via de relatie $\|\mathbf{R}\| = k\,e$ en bepaal de vergelijking van de baan in poolcoördinaten.

(iii) Maak in het geval van een ellipsvormige baan gebruik van de parametervoorstelling betrokken op de hoofdassen om uit een berekening van $\mathbf{L}_O$ de vergelijking van Kepler voor de excentrische anomalie op te stellen.

II. (i) Geef de definitie van het massamiddelpunt C van een stelsel van deeltjes.

(ii) Formuleer (zonder bewijs) de stellingen omtrent de afgeleide van, respectievelijk, het totaal lineair moment, het impulsmoment om de oorsprong O en de kinetische energiefunctie.

(iii) Ga na welke conclusies je uit die algemene stellingen kunt halen door opsplitsing van de positievector van elk deeltje in de som van de plaatsvector van C en de relatieve positievector ten opzichte van C.

III. Een deeltje met massa m beweegt langs een vlakke kromme met vergelijking $y = A\sin(\alpha x)$ (A, α constant), en wel zodanig dat de absolute waarde van de snelheid een constante v_0 is.

(i) Bereken $\dot{x}$ (positief verondersteld) in functie van x (en de gegeven constanten).

(ii) Bereken de componenten a_x en a_y van de versnelling $\mathbf{a}$ in functie van x.

(iii) Bereken vervolgens de tangentiële en normale componenten van $\mathbf{a}$ in functie van x en leid daaruit, voor $x \in]0, \pi/2\alpha[$, de formule voor de kromtestraal ρ af.

(iv) Neem nu aan dat die beweging het gevolg is van de inwerking van een niet nader gepreciseerde gegeven kracht, dat de binding glad is en dat de reactie veroorzaakt door de binding nul wordt in het punt met abscis $x = \pi/2\alpha$. Bepaal daaruit de waarden van de tangentiële en normale componenten van de gegeven kracht in datzelfde punt.

IV. Een homogene staaf met lengte 2ℓ en gewicht $\mathbf{W}$ rust met beide uiteinden op een *gladde* parabool met vergelijking $2ay = x^2$, gelegen in een verticaal (x, y)-vlak. $a > 0$

(i) Toon aan dat evenwicht niet mogelijk is wanneer één van de uiteinden zich in de oorsprong bevindt.

(ii) Toon aan dat evenwicht wel kan wanneer de staaf zich horizontaal bevindt en bereken in die evenwichtsconfiguratie de lengte van de reactiekrachten in beide uiteinden, in functie van de gegevens a, ℓ en W.