Examen Theoretische Mechanica (september 2005)

~~I.~~ Beschouw een vast en een bewegend referentiestelsel voor de Euclidische ruimte E. rel. beweging

~~(i)~~ Stel de algemene formules op voor het verband tussen absolute en relatieve snelheid en versnelling van een bewegend punt (het concept *ogenblikkelijke rotatievector* gekend zijnde).

~~(ii)~~ Leid daaruit af dat een referentiestelsel dat een eenparige translatiebeweging uitvoert t.o.v. een inertiaalstelsel, eveneens een inertiaalstelsel is.

~~II.~~ ~~(i)~~ Definieer de traagheidstensor van een star lichaam om een willekeurig punt A, vast aan dit lichaam verbonden.

~~(ii)~~ Geef en verantwoord de definitie van het traagheidsmoment I_ℓ om een rechte ℓ.

~~(iii)~~ Formuleer en bewijs de stelling van Steiner.

beweging deeltje i.f.v. α.

III. Een deeltje met massa m beweegt in een glad *horizontaal* vlak en is via een veer met natuurlijke lengte a en krachtsconstante k verbonden met een vast punt O van dat vlak. De begincondities ($t = 0$) voor de beweging van het deeltje, uitgedrukt in poolcoördinaten, zijn: $r_0 = 2a$, $\theta_0 = 0$, $\dot{r}_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = \omega$.

(i) Toon aan dat uit een behoudswet volgt dat op elk tijdstip tijdens de beweging zal gelden:

$$\dot{\theta} = \frac{4a^2\omega}{r^2}.$$

(ii) Reduceer vervolgens de energie-integraal tot deze van een geassocieerde 1-dimensionale beweging, van het type:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = E.$$

Welke is de functie $U(r)$ en de waarde van de constante E?

(iii) Stel dat de lijn van constante energie E de grafiek van $U(r)$ een tweede maal snijdt in het punt met abscis $4a$. Toon aan dat dit impliceert dat

$$k = \frac{3}{8}m\omega^2.$$

$\to F_z$

IV. Een deeltje met massa m beweegt in een vast *verticaal* vlak, langs een vooropgegeven kromme. De kromme is zodanig dat zijn kromtestraal ρ gegeven wordt door $\rho = b\,\cos\theta$, met b een constante en θ de hoek tussen de raaklijn aan de kromme en de horizontale. Het deeltje is onderworpen aan de zwaartekracht en neem aan dat voor de reactiekracht, t.o.v. de intrinsieke basis $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$, geldt: $R_t = -\mu R_n$, μ constant (Coulombwrijving).

(i) Maak gebruik van het verband tussen $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$ en θ om aan te tonen dat

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}.$$

(ii) Toon aan dat de absolute waarde v van de snelheid voldoet aan de vergelijking

$$\frac{dv^2}{d\theta} + 2\mu v^2 = -\,2bg\,\cos\theta(\sin\theta + \mu\cos\theta).$$