Examen Theoretische Mechanica (juni 2005)

I. (i) Wanneer zeggen we dat een krachtveld $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$ afleidbaar is van een potentiële energiefunctie? Welke is daartoe de nodige en voldoende voorwaarde voor $\mathbf{F}$?

(ii) Formuleer en bewijs een stelling omtrent afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ in zichzelf die deze nodige en voldoende voorwaarde in een algemener kader plaatst.

(iii) Pas de resultaten nu toe op het geval van de zwaartekracht.

II. (i) Geef voor een stelsel van N deeltjes de definitie van: het massamiddelpunt C, het totaal lineair moment $\mathbf{P}(t)$, het impulsmoment $\mathbf{L}_O(t)$ om het referentiepunt O, de kinetische energie $T(t)$.

(ii) Toon aan, vertrekkend van de algemene bewegingsvergelijkingen, dat het massamiddelpunt beweegt als een punt waarin de totale massa van het stelsel is geconcentreerd en dat onderworpen is aan de som van alle uitwendige krachten.

(iii) Formuleer en bewijs een eigenschap omtrent de afgeleide van T.

III. (i) Schrijf de bewegingsvergelijkingen in poolcoördinaten neer voor een deeltje met massa m dat in een vlak beweegt onder invloed van de kracht $\mathbf{F} = -k(r - l)\mathbf{e}_r$ (k, l positieve constanten).

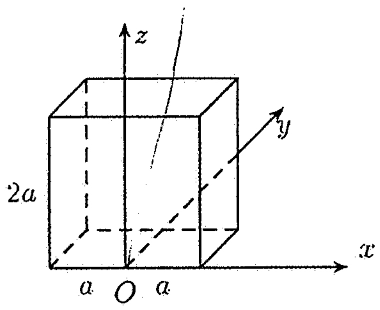
(ii) Veronderstel nu dat het deeltje gedwongen wordt om te bewegen langs de spiraal met vergelijking $r = be^{a\theta}$ (a, b positief) en dat die binding glad is. Toon aan dat op elk tijdstip tijdens die beweging zal gelden dat $ar\dot{\theta} = \dot{r}$ en dat het glad zijn van de binding voor de reactiekracht $\mathbf{R}$ impliceert dat $aR_r + R_\theta = 0$.

(iii) Gebruik de gegevens van punt (ii) om uit de gewijzigde vergelijkingen van punt (i) de onbekende reactiekracht te elimineren en toon aan dat $u = r - l$ moet voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0, \qquad \omega^2 = \frac{ka^2}{m(a^2 + 1)}.$$

(iv) Bepaal nu $r(t)$ indien $r(0) = 2l$ en $\dot{r}(0) = 0$ en bereken de componenten van de reactiekracht op het tijdstip $t = \pi/(2\omega)$.

IV. Beschouw een kubus met massa M en ribbe $2a$.



(i) Bereken de componenten van $\mathcal{I}_O$ t.o.v. het referentiestelsel aangegeven op de figuur.

(ii) Toon aan, op basis van symmetrieargumenten, dat de x-as en de eerste bissectrice in het (y, z)-vlak hoofdtraagheidsassen door O zijn. Bereken de overeenkomstige hoofdtraagheidsmomenten.

(iii) Bepaal een derde hoofdtraagheidsas en bereken zijn traagheidsmoment.

Oplossingen Examen Theoretische Mechanica (juni 2005)

III. (i) Schrijf de bewegingsvergelijkingen in poolcoördinaten neer voor een deeltje met massa m dat in een vlak beweegt onder invloed van de kracht $\mathbf{F} = -k(r-l)\mathbf{e}_r$ (k, l positieve constanten).

(ii) Veronderstel nu dat het deeltje gedwongen wordt om te bewegen langs de spiraal met vergelijking $r = be^{a\theta}$ (a, b positief) en dat die binding glad is. Toon aan dat op elk tijdstip tijdens die beweging zal gelden dat $ar\dot{\theta} = \dot{r}$ en dat het glad zijn van de binding voor de reactiekracht $\mathbf{R}$ impliceert dat $aR_r + R_\theta = 0$.

(iii) Gebruik de gegevens van punt (ii) om uit de gewijzigde vergelijkingen van punt (i) de onbekende reactiekracht te elimineren en toon aan dat $u = r - l$ moet voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0, \qquad \omega^2 = \frac{ka^2}{m(a^2+1)}.$$

(iv) Bepaal nu $r(t)$ indien $r(0) = 2l$ en $\dot{r}(0) = 0$ en bereken de componenten van de reactiekracht op het tijdstip $t = \pi/(2\omega)$.

Oplossing. (i) De bewegingsvergelijkingen voor een dergelijk deeltje zijn in poolcoördinaten

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -k(r-l), \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= 0. \end{cases}$$

(ii) Uit $r = be^{a\theta}$ volgt $\dot{r} = ab\dot{\theta}e^{a\theta} = ar\dot{\theta}$. Bij een gladde binding staat de reactiekracht loodrecht op de raakrichting van de kromme, of, equivalent, loodrecht op de richting van de snelheid. Er geldt dus $\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = 0$. Met $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = r\dot{\theta}(a\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta)$ en $\mathbf{R} = R_r\mathbf{e}_r + R_\theta\mathbf{e}_\theta$ wordt dit $aR_r + R_\theta = 0$.

(iii) De gewijzigde vergelijkingen zijn nu

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -k(r-l) + R_r, \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= R_\theta. \end{cases}$$

Verder is $\ddot{\theta} = \dfrac{\ddot{r}}{ar} - \dfrac{\dot{r}^2}{ar^2}$. Via $aR_r + R_\theta = 0$ volgt dus dat

$$a(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + a\frac{k}{m}(r-l) + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

of, als we $\dot{\theta}$ en $\ddot{\theta}$ vervangen door hun uitdrukkingen in functie van r, $\dot{r}$ en $\ddot{r}$:

$$(a + \frac{1}{a})\ddot{r} + a\frac{k}{m}(r-l) = 0.$$

Stelt men $u = r - l$ dan wordt deze vergelijking inderdaad $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ met $\omega^2 = \dfrac{ka^2}{m(a^2+1)}$.

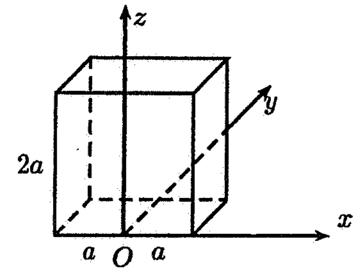
(iv) Een algemene oplossing voor de vergelijking van de harmonische oscillator is $u(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. De integratieconstanten A en ϕ volgen uit de beginvoorwaarden:

$$\begin{cases} u(0) = l = A\cos\phi, \\ \dot{u}(0) = 0 = -A\omega\sin\phi, \end{cases}$$

waaruit $A = l$ en $\phi = 0$. Dus, $r(t) = l + l\cos\omega t$, $\dot{r}(t) = -\omega l\sin\omega t$ en $\ddot{r}(t) = -\omega^2 l\cos\omega t$. Op $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ vinden we dus $r\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right) = l$, $\dot{r}\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right) = -\omega l$, $\ddot{r}\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right) = 0$. Via de bewegingsvergelijkingen (en de uitdrukkingen voor $\dot{\theta}$ en $\ddot{\theta}$) vinden we dan uiteindelijk:

$$\begin{cases} R_r &= -\dfrac{m\omega^2 l}{a^2}, \\ R_\theta &= \dfrac{m\omega^2 l}{a}. \end{cases}$$

IV. Beschouw een kubus met massa M en ribbe 2a.



(i) Bereken de componenten van $\mathcal{I}_O$ t.o.v. het referentiestelsel aangegeven op de figuur.

(ii) Toon aan, op basis van symmetrieargumenten, dat de x-as en de eerste bissectrice in het (y,z)-vlak hoofdtraagheidsassen door O zijn. Bereken de overeenkomstige hoofdtraagheidsmomenten.

(iii) Bepaal een derde hoofdtraagheidsas en bereken zijn traagheidsmoment.

Oplossing. (i) We gebruiken de eigenschap $\mathcal{I}_O = \mathcal{I}_C + M(||\mathbf{OC}||^2\mathbf{1} - \mathbf{OC}\otimes\mathbf{OC})$, met $\mathbf{OC} = a\mathbf{e}_y + a\mathbf{e}_z$. Uit de oefening over de balk in de cursus halen we dat $I^{(C)} = \frac{2}{3}Ma^2 I$. Verder heeft $M||\mathbf{OC}||^2\mathbf{1}$ als componentenmatrix $2Ma^2I$, terwijl de componentenmatrix van $M\mathbf{OC}\otimes\mathbf{OC}$ gelijk is aan $Ma^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

Alles samen: $I^{(O)} = \frac{1}{3}Ma^2\begin{pmatrix}8&0&0\\0&5&-3\\0&-3&5\end{pmatrix}$.

(ii) De x-as is een hoofdtraagheidsas van de kubus door O omdat het de normaal door O is van een symmetrievlak, met name het (y,z)-vlak. De eerste bissectrice van het (y,z)-vlak is een symmetrie-as en dus ook een een hoofdtraagheidsas van de kubus door O. Voor $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$ is het hoofdtraagheidsmoment reeds gekend: $I_1 = \frac{8}{3}Ma^2$. Een eenheidsvector volgens de eerste bissectrice is $\mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)$. Het corresponderende hoofdtraagheidsmoment is dus

$$I_2 = \frac{1}{6}Ma^2(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}8&0&0\\0&5&-3\\0&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}Ma^2.$$

(iii) $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2$ staan loodrecht op elkaar. We kunnen ze dus aanvullen tot een basis van hoofdtraagheidsassen door $\mathbf{e}_3$ gelijk aan $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = (0,-1,1)$ te stellen. Het geassocieerde hoofdtraagheidsmoment is dan

$$I_3 = \frac{1}{6}Ma^2(0\ -1\ 1)\begin{pmatrix}8&0&0\\0&5&-3\\0&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{8}{3}Ma^2.$$