

Examen Theoretische Mechanica I (september 2003)

- I. Bereken de componenten van snelheid en versnelling in cilindercoördinaten.
- II. Veronderstel dat, voor de beweging van stelsels van deeltjes, de algemene stellingen omtrent de afgeleiden van het totaal lineair moment, het impulsmoment om de oorsprong O en de kinetische energiefunctie gekend zijn. Geef de definitie van het massamiddelpunt C van het stelsel en ga na welke conclusies je uit de algemene stellingen kunt halen door opsplitsing van de positievector van elk deeltje in de som van de plaatsvector van C en de relatieve positievector ten opzichte van C .
- III. Een deeltje met massa m is onderworpen aan de zwaartekracht en is gebonden om te bewegen op een *glad* kegeloppervlak met top in de oorsprong en as volgens de verticale z -as naar boven. De halve tophoek van de kegel is $\pi/4$.
 - (i) Geef de parametervoorstelling $(\rho, \theta) \mapsto \mathbf{r}(\rho, \theta)$ van de kegel in cilindercoördinaten. Bereken de raakvectoren $\partial \mathbf{r} / \partial \rho$ en $\partial \mathbf{r} / \partial \theta$ aan het kegeloppervlak, ten opzichte van de aangepaste basis $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ en bepaal tevens een vector \mathbf{N} gelegen volgens de oppervlaknormaal.
 - (ii) Schrijf de twee bewegingsvergelijkingen neer komend van projectie van de algemene bewegingswet op de raakrichtingen aan de kegel. Maak gebruik van een behoudswet om één van die vergelijkingen te herleiden tot een vergelijking voor ρ alleen.
 - (iii) Projecteer tenslotte de bewegingswet op de normaalrichting \mathbf{N} om de reactie te bepalen.
- IV. Een homogeen star lichaam met massa M heeft de vorm van een gelijkbenige, rechthoekige driehoek OAB met rechthoekszijden $OA = OB = a$. Kies de x -as en y -as van een referentiestelsel vast aan het lichaam respectievelijk volgens OB en OA .
 - (i) Toon aan dat de component I_{xy} van de traagheidstensor om O gegeven wordt door $-\frac{1}{12}Ma^2$.
 - (ii) Neem aan dat de driehoek om zijn zijde OA wentelt, met een constante rotatievector $\boldsymbol{\omega}$ volgens de y -as. Bereken \mathbf{L}_O met behulp van de componenten van de traagheidstensor en toon aan dat de kennis van I_{xy} volstaat voor een expliciete uitdrukking van $\dot{\mathbf{L}}_O$ t.o.v. de gekozen meebewegende basis.
 - (iii) Het vasthouden van O en A volstaat om het vast zijn van de wentelingsas te garanderen en geeft aanleiding tot onbekende reactiekrachten \mathbf{R}_O en \mathbf{R}_A . Indien we veronderstellen dat \mathbf{R}_A loodrecht staat op de wentelingsas, toon dan aan dat de wet van Euler $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{M}_O$ volledig \mathbf{R}_A bepaalt.
 - (iv) Schrijf de plaatsvector van C neer (zie cursus) en maak nu gebruik van de andere wet van Euler om ook \mathbf{R}_O te bepalen.