Examen Theoretische Mechanica I (september 1999)

I. Zij $(e) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ een gegeven vaste basis van Vect E en $(e') = \big(\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t), \mathbf{e}'_3(t)\big)$ een algemene bewegende basis.

(i) Bespreek de invoering van het begrip "ogenblikkelijke rotatievector" van (e') t.o.v. (e).

(ii) Bewijs voor een willekeurige vectorfunctie $\mathbf{x} : I \subset \mathbf{R} \to \operatorname{Vect} E$ de formule die de afgeleide t.o.v. (e) in verband brengt met de afgeleide t.o.v. (e').

(iii) Leid daaruit het verband af tussen de snelheden van twee punten P en Q van een starre beweging.

II. (i) Geef voor een stelsel van N deeltjes de definitie van : het massamiddelpunt C, het totaal lineair moment $\mathbf{P}(t)$, het impulsmoment $\mathbf{L}_O(t)$ om het referentiepunt O, de kinetische energie $T(t)$ en de kinetische energie $T_C(t)$ t.o.v. het massamiddelpunt.

(ii) Toon aan dat het massamiddelpunt beweegt als een punt waarin de totale massa van het stelsel is geconcentreerd en dat onderworpen is aan de som van alle uitwendige krachten.

(iii) Formuleer en bewijs een eigenschap omtrent de afgeleide van T en toon aan dat een analoge eigenschap geldt voor T_C.

III. Een cilinder met straal r en massa m rust tussen twee symmetrisch opgestelde schuine wanden L_1 en L_2 die een hoek α met de verticale insluiten. Op de cilinder werkt de zwaartekracht, plus een gegeven constant krachtenkoppel, waarvan het moment $\mathbf{M}$ volgens de horizontale as van de cilinder ligt (naar voor toe). De wand L_1 is ruw, met statische wrijvingscoëfficiënt $\mu_0 = \operatorname{tg}\alpha$; de wand L_2 is glad. Noem $\mathbf{T}$ en $\mathbf{N}$ de tangentiële en normale gedeelten van de reactiekracht in het contactpunt met L_1 en $\mathbf{R}$ de reactie in het contactpunt met L_2.

(i) Stel de evenwichtsvoorwaarden op en bepaal de onbekende reactiekrachten in functie van de gegevens.

(ii) Indien $M = \|\mathbf{M}\| = \frac{1}{2} mgr \cos\alpha$, bepaal de waarde van α waarvoor de kritische grens voor doorschuiven bij L_1 bereikt wordt.

<u>Bonusvraag</u>: Wat gebeurt er indien $M = mgr \cos\alpha$ en $\alpha > \pi/4$? Verklaar!

IV. Ten opzichte van een referentiestelsel waarvan de z-as verticaal naar beneden is gericht beschouwen we een geladen deeltje met positieve lading q en massa m dat onderworpen is aan de volgende krachten: de zwaartekracht, een constant magnetisch veld volgens de positieve y-as en de kracht $\mathbf{F} = mg\omega_c \sin 2\omega_c t\, \mathbf{e}_x$ $(\omega_c = qB/m)$. Het deeltje vertrekt uit de oorsprong met beginsnelheid

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\omega_c} g\left(1 + \frac{1}{2}\omega_c\right)\mathbf{e}_x + g\mathbf{e}_y.$$

Bepaal het tijdstip waarop het deeltje voor het eerst het horizontaal vlak $z = -g/6\omega_c$ bereikt.