Examen Theoretische Mechanica I (juni 1999)

I. Beschouw een deeltje met massa m, onderworpen aan de krachtwet $\mathbf{F} = (-k/r^2)\,\mathbf{e}_r$ (vraagstuk van Kepler).

(i) Bespreek bondig de aard van de mogelijke banen zoals die volgt uit een kwalitatieve analyse van de effectieve potentiaal.

(ii) Leid uit de vectoriële bewegingsvergelijking de energie-integraal, het constant zijn van het impulsmoment $\mathbf{L}_O$ en van de Laplace-Runge-Lenz vector $\mathbf{R}$ af.

(iii) Definieer de constante e via de relatie $\|\mathbf{R}\| = k\,e$ en bepaal de vergelijking van de baan in poolcoördinaten. Bespreek de aard van de baan in functie van de waarde van de totale energie E.

II. (i) Zij gegeven een stelsel van krachten inwerkend op een star lichaam, met resultante $\mathbf{F}$ en resulterend krachtmoment $\mathbf{M}_O$. Wat noemt men een equivalente realisatie van dit krachtenstelsel?

(ii) Geef de definitie van een *krachtenkoppel* en toon aan dat zo'n koppel eenvoudig kan gerealiseerd worden door twee krachten (één constructie volstaat).

III. Een punt doorloopt een parabool met vergelijking $r = p/(1 + \cos\theta)$. De evolutie van de poolhoek θ als functie van t wordt impliciet gegeven door de relatie

$$t = 2A\left(\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,\frac{\theta}{2}\right) \qquad (A > 0)\,.$$

(i) Bereken de absolute waarde van de snelheid in functie van θ.

(ii) Toon aan dat $r^2\dot{\theta}$ constant is.

IV. Een deeltje met massa m is onderworpen aan de zwaartekracht en beweegt op een *glad* oppervlak waarvan de vergelijking in cilindercoördinaten gegeven wordt door $z = \alpha\,\rho^2 + \alpha^3\,\rho^4 \quad (\alpha > 0)$.

(i) Schrijf expliciet de parametervoorstelling $(\rho, \theta) \mapsto \mathbf{r}(\rho, \theta)$ van het bindingsoppervlak neer en bereken de raakvectoren $\partial\mathbf{r}/\partial\rho$ en $\partial\mathbf{r}/\partial\theta$ t.o.v. de basis $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Toon aan dat de vector $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z - z'(\rho)\mathbf{e}_\rho$ volgens de oppervlaknormaal ligt.

(ii) Stel de reactiekracht voor door $\mathbf{R} = \lambda\mathbf{n}$ en bereken het moment $\mathbf{M}_O$ van alle krachten die op het deeltje inwerken. Kan je er een behoudswet uit afleiden?

(iii) Schrijf de drie geprojecteerde bewegingsvergelijkingen van het deeltje neer in cilindercoördinaten (zonder gebruik te maken van de bindingsvergelijking). Verifieer vervolgens dat het vraagstuk als particuliere oplossing een cirkelvormige baan toestaat, met

$$\rho(t) = \rho_0 = \alpha^{-1} \qquad \text{en} \qquad \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 = \sqrt{6g\alpha}.$$

Toon aan dat de reactiekracht die bij deze oplossing hoort, gegeven wordt door $\mathbf{R} = mg(\mathbf{e}_z - 6\,\mathbf{e}_\rho)$.

(iv) Stel de energie-integraal op, reduceer ze tot een eerste integraal van een geassocieerde 1-dimensionale beweging in ρ en bereken de waarde van de constante E in het geval van de cirkelvormige baan uit (iii).