Examen Analyse 2 : Oefeningen. (28 augustus 2006) Reeks 4.

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten.

1. Integralen

Beschouw de integralen

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)} dx,$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos(x)} dx,$$

Beantwoord voor elk van beide de volgende vragen:

1. Is dit een eigenlijke integraal of een oneigenlijke integraal?
2. Als het een eigenlijke integraal is, wat is dan zijn waarde?
3. Als het een oneigenlijke integraal is, is hij dan convergent en zo ja, tot wat?
4. Als het een oneigenlijke integraal is, is hij dan divergent en zo ja, tot wat?

2. Fourierreeksen

Beschouw de functie f die bepaald is door

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x, \quad \forall x \in [0,2] \\ &= 0 \quad \forall x \in [-2,0[\end{aligned}$$

a. Geef de bijbehorende Fourierreeks met hoofdperiode 4.
b. Geef afzonderlijk de even en de oneven coefficienten van de reeksontwikkeling.
c. Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie f in elk punt van $[0,2]$? Geef de reden waarom of waarom niet.

3. Meervoudige integralen.

Bereken de drievoudige integraal van de functie $f(x,y,z) = yz$ over het gebied Q bepaald door de voorwaarden:

$$x^2 + y \leq 1, \; 0 \leq z \leq y.$$

4. Oplossing van een differentiaalvergelijking

Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$(x+y)y' = x - y, \; y(1) = 1$$

Examen Analyse 2 : Theorie. (28 augustus 2006)

1. Integralen.

a. Geef en bewijs de regel voor partiële integratie van een product van twee functies.

b. Geef primitieven van de volgende functies:

1. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ (waarbij $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ constanten zijn)
2. $\frac{1}{\cos^2 x}$ $(x \in]-1, +1[)$

2. Machtreeksen.

a. Bewijs dat het convergentiegebied van een machtreeks steeds een (eventueel ontaard) interval is.

b. Aansluitend hierop, geef de definitie van de convergentiestraal en het convergentieïnterval van een machtreeks.

3. Gewone differentiaalvergelijkingen.

Bespreek de integratie van een gereduceerde lineaire differentiaalvergelijking van tweede orde met constante coëfficiënten.

4. Partiële differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de eendimensionale golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Geef de algemene vorm van de oplossingen van deze vergelijking van het "reizende golf" type en toon aan dat het inderdaad oplossingen zijn.

Gent, 28 augustus 2006

Prof. W. Govaerts