87-88

Examen Theoretische Mechanica (1e deel) (september 1988)

I. Zij $(e) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ een gegeven vaste basis van Vect E en $(e') = \left(\underline{e}'_1(t), \underline{e}'_2(t), \underline{e}'_3(t)\right)$ een algemene bewegende basis.

(i) Bespreek de invoering van het begrip "ogenblikkelijke rotatievector" van (e') t.o.v. (e).

(ii) Bewijs voor een willekeurige vectorfunctie $\underline{x} : I \subset \mathbb{R} \to \text{Vect}\, E$ de formule die de afgeleide t.o.v. (e) in verband brengt met de afgeleide t.o.v. (e').

II. (i) Geef voor een stelsel van N deeltjes de definitie van het totaal lineair moment $\underline{P}(t)$ en het impulsmoment $\underline{L}_0(t)$ om het referentiepunt O.

(ii) Formuleer en bewijs een stelling omtrent de afgeleide van $\underline{P}$ en $\underline{L}_0$.

(iii) Definieer het massamiddelpunt C en herwerk de formules voor $\underline{P}$ en $\underline{L}_0$ met behulp van de plaatsvector van C.

(iv) Welke conclusies in verband met C kan je nu verder halen uit de stellingen van punt (ii).

III. Een deeltje met massa m beweegt in een vlak onder invloed van de aantrekkende centrale kracht met grootte mk^2/r^3 (met k een positieve constante). Uitgedrukt in poolcoördinaten (r, θ) wordt de beginconfiguratie op $t = 0$ bepaald door : $\theta_0 = 0$, $r_0 = a$, $\underline{v}_0 = u\underline{e}_\theta$ (a, u : positief).

(i) Bereken (in functie van de beginwaarden) de constante waarde van de totale energie E en van het draaimoment L volgens de richting loodrecht op het vlak van de beweging.

(ii) Maak een schets van de grafiek van de effectieve potentiaal $U(r)$ (3 gevallen te onderscheiden) en bespreek telkens <u>bondig</u> de aard van de beweging op grond van het verloop van U t.o.v. het energieniveau E.

(iii) Toon aan dat voor de vergelijking van de baan $r(\theta)$ in poolcoördinaten moet gelden :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\, r^2(r^2 - a^2)\left(1 - \frac{k^2}{a^2u^2}\right).$$

(iv) Integreer de differentiaalvergelijking in het geval $k > au$.

IV. Een deeltje met massa m is onderworpen aan de zwaartekracht en wordt door de oorsprong O (van een referentiestelsel met z-as verticaal omhoog gericht) aangetrokken volgens de krachtwet $\underline{F} = -k\underline{r}$. Het deeltje is gebonden te bewegen langs een gladde cirkelvormige schroeflijn die in cilindercoördinaten (ρ, θ, z) bepaald wordt door de vergelijkingen $\rho = R$, $z = h\theta$.

(i) Indien we de booglengte s langs de schroeflijn meten vanuit het punt bepaald door $\theta = 0$ in de zin van toenemende θ, toon dan aan dat $s = \sqrt{R^2 + h^2}\,\theta$ en geef de parametervoorstelling $s \to \underline{r}(s)$ van de baan.

(ii) Toon aan dat de potentiële energie $\overline{V}(s)$ die geassocieerd is aan de gegeven krachten wordt gegeven door

$$\overline{V}(s) = \frac{mgh}{\sqrt{R^2 + h^2}}\, s + \frac{1}{2} k \left(R^2 + \frac{h^2 s^2}{R^2 + h^2}\right).$$

(iii) Bepaal de oplossing $s(t)$ indien het deeltje op $t = 0$ met snelheid nul vertrekt in het punt bepaald door $\theta_0 = \pi$.

07 - 00

III. Een deeltje met massa m en lading q beweegt t.o.v. een inertiaalstelsel $(e) = (O; \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ onder invloed van een constant magnetisch veld volgens de z-richting en is verder onderworpen aan de terugroepende kracht $\underline{F} = -k\underline{r}$ (k constant).

1) Schrijf de vectoriële bewegingsvergelijking neer; projecteer ze op de assen en bepaal de algemene oplossing. [Gebruik bij de berekening de volgende notaties: ω_0 voor de harmonische oscillatorfrequentie, ω_c voor de cyclotronfrequentie, ω_1 voor $\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2}$]

2) Schrijf de vectoriële bewegingsvergelijking neer voor een waarnemer in een niet-inertiaalstelsel $(e') = (O; \underline{e}'_x, \underline{e}'_y, \underline{e}'_z)$. Selecteer de ogenblikkelijke rotatievector $\underline{\omega}$ van (e') t.o.v. (e) zodanig dat deze vergelijking geen termen in de snelheid meer bevat. Toon aan dat voor zo'n waarnemer (mits geschikte keuze van het referentiestelsel) het probleem gereduceerd is tot dat van een 3-dimensionale harmonische oscillator met respectievelijke frequenties $(\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_1, \omega_0)$.

Oplossing

1) bewegingsvgl.: $m\ddot{\underline{r}} = -k\underline{r} + q\dot{\underline{r}} \times \underline{B}$ $\qquad \underline{B} = B\underline{e}_z$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + q\dot{y}B & \Big|\ 1 \\ m\ddot{y} = -ky - q\dot{x}B & \Big|\ i \\ m\ddot{z} = -kz & \end{cases}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega_c = \frac{qB}{m}$

stel $\omega_1 = \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2}$

– integratie van de z-vergelijking:

$$z = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t$$

of $$z = a_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

– integratie van de x- en y-vergelijking:

stel $\zeta = x + iy$

$$\rightarrow \quad \ddot{\zeta} + i\omega_c\dot{\zeta} + \omega_0^2\zeta = 0.$$

wortels karakteristieke vgl.: $\dfrac{-i\omega_c \pm i\omega_1}{2}$

$$\Rightarrow \zeta(t) = A\, e^{-\frac{1}{2}i(\omega_c + \omega_1)t} + B\, e^{\frac{1}{2}i(\omega_1 - \omega_c)t}$$

A, B: complex

stel bvb. $$\begin{cases} A = a_2 e^{i\varphi_2} \\ B = a_3 e^{i\varphi_3} \end{cases}$$

dan krijgen we

$$\begin{cases} x(t) = a_2 \cos\left(\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_c)t - \varphi_2\right) + a_3 \cos\left(\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_c)t + \varphi_3\right) \\ y(t) = -a_2 \sin\left(\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_c)t - \varphi_2\right) + a_3 \sin\left(\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_c)t + \varphi_3\right). \end{cases}$$

andere berekeningswijze:

stel $\begin{cases} A = c_3 + ic_4 \\ B = c_5 + ic_6 . \end{cases}$

dan krijgen we:

$$\begin{cases} x(t) = c_3 \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_c)t + c_4 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_c)t \\ \qquad + c_5 \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_c)t - c_6 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_c)t , \\ y(t) = c_4 \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_c)t - c_3 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_c)t \\ \qquad + c_6 \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_c)t + c_5 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_c)t . \end{cases}$$

e) vectoriële bewegingsvgl. voor de relatieve waarnemer.

$$m\underline{\ddot{r}}^{(e')} = -k\underline{r} + q\left(\underline{\dot{r}}^{(e')} + \underline{\omega}\times\underline{r}\right)\times\underline{B}$$
$$\quad - m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) - m\,\underline{\dot{\omega}}\times\underline{r} - 2m\,\underline{\omega}\times\underline{\dot{r}}^{(e')} .$$

De termen in $\underline{\dot{r}}^{(e')}$ verdwijnen wanneer we $\underline{\omega}$ kiezen zodanig dat:

$$\underline{\omega} = -\frac{q}{2m}\underline{B} = -\frac{1}{2}\omega_c\,\underline{e}_z .$$

Daarmee reduceert de vectoriële vg. tot:

$$m\underline{\ddot{r}}^{(e')} = -k\underline{r} + \frac{q^2}{2m}\underline{B}\times(\underline{B}\times\underline{r}) - \frac{q^2}{4m}\underline{B}\times(\underline{B}\times\underline{r})$$
$$= -k\underline{r} + \frac{q^2}{4m}\left(\underline{B}(\underline{B}\cdot\underline{r}) - \underline{r}B^2\right)$$
$$= -\left(k + \frac{q^2B^2}{4m}\right)\underline{r} + \frac{q^2(\underline{B}\cdot\underline{r})}{4m}\underline{B}$$

of

$$\ddot{\underline{r}}^{(e')} = -\frac{1}{4}(\omega_c^2+4\omega_0^2)\underline{r} + \frac{1}{4}\omega_c^2 z \underline{e}_z .$$

Kiest een waarnemer met ogenblikkelijke rotatievector $\underline{\omega}$ zijn referentiestelsel in O zodanig dat $\underline{e}'_z = \underline{e}_z$, dan worden de geprojecteerde vergelijkingen:

$$\begin{cases} \ddot{x}' = -\frac{1}{4}\omega_1^2 x' \\ \ddot{y}' = -\frac{1}{4}\omega_1^2 y' \\ \ddot{z}' = -\omega_0^2 z' . \end{cases}$$

Dit stelt een 3-dimensionale harmonische oscillator voor met respectievelijke frequenties:

$$\left(\tfrac{1}{2}\omega_1, \tfrac{1}{2}\omega_1, \omega_0\right).$$
