Examen Theoretische Mechanica (eerste deel) (mei 1990)

I. Stel de formules op voor snelheid en versnelling van een deeltje in cilindercoördinaten.

II. (i) Schrijf de algemene bewegingsvergelijkingen neer voor een stelsel van twee deeltjes, onderworpen aan uitwendige en inwendige krachten. Transformeer deze tot een equivalent stelsel differentiaalvergelijkingen voor $\mathbf{r}_C$ en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (geen bijzondere hypothesen omtrent de krachten).

(ii) Toon aan dat voor het impulsmoment om C en de kinetische energie van de beweging t.o.v. steeds geldt :

$$\mathbf{L}_C = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad , \quad T_C = \frac{1}{2}\mu \dot{\mathbf{r}}^2,$$

met μ de gereduceerde massa.

(iii) Beschouw nu het bijzonder geval van Newtoniaanse aantrekking tussen beide deeltjes, zonder uitwendige krachten, en bespreek bondig hoe deze situatie leidt tot een correctie aan de derde wet van Kepler.

III. Een 1-dimensionaal bewegend deeltje met massa 1 is onderworpen aan de krachtwet
$\mathbf{F} = -(x + x^2 + \varepsilon x^3)\,\mathbf{e}_x$, met $\varepsilon > 0$.

(i) Toon aan dat het globale fasediagram twee stabiele evenwichtspunten vertoont op voorwaarde dat geldt : $\varepsilon < 1/4$. Maak voor een dergelijke situatie een schets van de grafiek van de potentiële energiefunctie en het geassocieerd fasediagram.

(ii) Beschouw het geval $\varepsilon = 1/4$. Voor welke waarde van de totale energie E is er een fasebaan waarlangs de beweging voor $t \to \pm\infty$ asymptotisch naar hetzelfde evenwichtspunt streeft?

(iii) Welke is de voorwaarde voor ε opdat beweging zou mogelijk zijn met negatieve totale energie.

IV. Een deeltje met massa m en negatieve lading q ondergaat de invloed van een constant electromagnetisch veld, waarbij $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_z$, $\mathbf{E} = B(2\omega_c\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$ ($B > 0$, z-as verticaal omhoog gericht, $\omega_c = qB/m$). Op $t = 0$ vertrekt het deeltje in de oorsprong met beginsnelheid $\mathbf{v}_0 = 2\omega_c\,\mathbf{e}_x + (\pi/2)\,\mathbf{e}_z$. Bepaal de positie van het deeltje op het ogenblik dat het leidend centrum zijn hoogste punt bereikt.