Examen Theoretische Mechanica I (juni 1994)

I. Zij $(e) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ een gegeven vaste basis van Vect E en $(e') = \left(\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t), \mathbf{e}'_3(t)\right)$ een algemene bewegende basis.

(i) Bespreek de invoering van het begrip "ogenblikkelijke rotatievector" van (e') t.o.v. (e).

(ii) Bewijs voor een willekeurige vectorfunctie $\mathbf{x} : I \subset \mathbf{R} \to \text{Vect}\, E$ de formule die de afgeleide t.o.v. (e) in verband brengt met de afgeleide t.o.v. (e').

(iii) Projecteer deze vectoriële relatie op de bewegende basis, m.a.w. bereken de componenten van $\dot{\mathbf{x}}^{(e)}$ t.o.v. de bewegende basis.

II. Behandel het vraagstuk van de sferische slinger.

(i) Formuleer het probleem; bespreek bondig enkele speciale bewegingstoestanden en verantwoord het gebruik van sferische coördinaten voor de algemene beweging.

(ii) Reduceer het vraagstuk tot twee kwadraturen via geschikte eerste integralen.

(iii) Geef een kwalitatieve bespreking van de beweging.

III. Beschouw twee gladde, homogene cilinders S_1 (straal $6a$) en S_2 (straal $4a$) met zelfde gewicht W. De cilinders worden in een laadbak geplaatst met gladde verticale wanden en een gladde vloer, die geheld is over een hoek α. De afstand tussen de zijwanden is $16a$, de assen van S_1 en S_2 zijn horizontaal en de respectievelijke massamiddelpunten C_1 en C_2 liggen in eenzelfde verticaal vlak (zie figuur).

(i) Bepaal bij evenwicht in de voorgestelde configuratie de grootte van alle optredende reaktiekrachten.

(ii) Bij welke kritische waarde van de hellingshoek α zal het evenwicht verbroken worden?

IV. Een deeltje met massa m is onderworpen aan een centrale kracht $\mathbf{F} = -f(r)\,\mathbf{e}_r$ en blijkt als gevolg daarvan een baan te beschrijven met poolvergelijking $r = \theta^2 + a$. Op $t = 0$ geldt $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 1/2$.

(i) Bereken $f(r)$.

(ii) Toon aan dat $\theta(t)$ impliciet gedefinieerd wordt door de relatie

$$\frac{1}{5}\theta^5 + \frac{2}{3}a\theta^3 + a^2\theta = \frac{1}{2}a^2 t.$$