Examen Numerieke Analyse
Theorie
Academiejaar 2000-2001
Tweede Zittijd

1. Beschrijf het principe van de continue kleinste kwadraten benadering, enerzijds gebaseerd op een pure veeltermbenadering en anderzijds steunend op orthogonale functies.

2. Bewijs volgend theorema
   Als $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ *een verzameling orthogonale veeltermen is, gedefinieerd in* $[a, b]$ *t.o.v. de gewichtsfunctie* $w(x)$ *en* ϕ_k *is een veelterm van graad* k *voor elke* $k = 0, 1, \ldots, n$ *dan bezit* ϕ_k k *verschillende enkelvoudige wortels en deze wortels liggen in het interval* $[a, b]$.

3. Leg uit hoe de kwadratuurformule van Gauss wordt opgesteld.
   Geef aan wat een kwadratuurformule van dit type is.
   Bespreek de bepaling van de gewichten A_k.
   Bespreek de bepaling van de ligging van de knooppunten x_k.
   Omvorming van de A_k's en de foutterm moeten *niet* behandeld worden.

4. Leg het effect uit van de afrondingsfouten en de procesfout bij de numerieke afleidingsformule

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Examen Numerieke Analyse
Oefeningen
Academiejaar 2000-2001
Tweede Zittijd

1. Beschouw de gemodificeerde Euler formule voor het oplossen van eerste-orde differentiaalvergelijkingen. Wat is het resultaat voor $y(h), y'(h)$ en $y''(h)$ wanneer

$$y''' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1$$

2. Bepaal de orthogonale veeltermen van graad 1 en 2 in het interval $[0, 1]$ t.o.v. de gewichtsfunctie $w(x) = x$. Maak van die kennis gebruik om in onderstaande Gaussische kwadratuurformule

$$\int_0^1 x f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

de x_i en A_i waarden te bepalen.

3. Veronderstel $x_1 < x_2 < x_3, x_2 - x_1 = h, x_3 - x_2 = \alpha\ h$ Toon aan dat $f''(x)$ benaderd kan worden door

$$\frac{2}{h^2}\left(\frac{f(x_1)}{1+\alpha} - \frac{f(x_2)}{\alpha} + \frac{f(x_3)}{\alpha(\alpha+1)}\right)$$

4. Gegeven de volgende kwadratuurformule

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx \approx A_1 f(-a) + A_2 f(0) + A_3 f(b)$$

Bepaal A_1, A_2 en A_3 zodat de grootst mogelijke GVAN bekomen wordt.