- weg kom 20 & 24/1
- best afspraak maken indien willig nodig

Examen algebra I - Februari 2002

Verdeling punten: *mondeling:* 8, *schriftelijke:* A:6, B:3, C:3.

*: moeilijke vragen.

A. Juist of Fout! (argumenteer uw antwoord)

1. Zij p, q verschillende priemgetallen in $\mathbb{Z}$. Zij $a, b \in \mathbb{Z}$ met $\text{ggd}(a-b, pq) = 1$. Het aantal oplossingen van $(X-a)(X-b) = 0$ in de ring $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ is gelijk aan 2^2.

2. $((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X])^* = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{1 \bmod 4, 3 \bmod 4\}$.

3. De functie $\sin x$ is transcendent over $\mathbb{C}(\cos(45x))$.

4. Zij L het splijtveld van een irreducibel polynoom van graad 3 over $\mathbb{Q}$. Dan is L ook het splijtveld van een veelterm van graad 6 over $\mathbb{Q}$.

5. Zij $\alpha \in \mathbb{R}$, α de wortel van een veelterm van graad 4 over $\mathbb{Q}$. Dan is α construeerbaar.

6.* Zij $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg f(X) = n \geq 1$. Zij L het splijtveld van $f(X)$ en $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong A_n$, $n \geq 5$. Dan is $f(X)$ irreducibel en de enige deelvelden $E \subset L$ die galois zijn over $\mathbb{Q}$ zijn L en $\mathbb{Q}$.

7. Zij K een veld en I, J idealen in $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$.
Zij $V(T)$ de oplossingsverzameling van het stelsel vergelijkingen bepaald door een ideaal $T \subset \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$.
Dan is $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

8. Zij R een ring en M het unieke maximaal ideaal in R. Dan is $R^* = R \setminus M$.

9. Zij K een veld, $\overline{K}$ de algebraïsche sluiting van K. Zij $\alpha \in \overline{K}$ zodat het minimaal polynoom van α over K een meervoudige wortel heeft. Dan is $\text{Kar}(K) = p \neq 0$.

10. Zij $z \in \mathbb{Z}[i]$, z een irreducibel element. Dan is $\mathbb{Z}[i]/(z)$ een eindig veld.

11.* $\mathbb{C}(\sin(x))$ is een velduitbreiding van $\mathbb{C}(\sin(45x))$ met $[\mathbb{C}(\sin(x)) : \mathbb{C}(\sin(45x))] = 45$.

B.

(a) Toon aan dat $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ een galoisuitbreiding is van $\mathbb{Q}$. Bepaal de galoisgroep.

(b) Zij $f(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. De discriminant van dit polynoom is 49. Toon aan dat het splijtveld van $f(X)$ gelijk is aan $\mathbb{Q}(\alpha)$ met α een wortel van $f(X)$ in $\mathbb{C}$.

Bepaal de andere wortels in functie van α.

Bepaal het minimaalpolynoom van α^{-1} over $\mathbb{Q}$.

(c) Bepaal de galoisgroep van $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \alpha)$ over $\mathbb{Q}$.

(d*) Bestaat er een cyclotome uitbreiding $\mathbb{Q}(\zeta_n)$, ζ_n een primitieve n-de eenheidswortel, die $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \alpha)$ bevat?

C. Zij $\zeta_{19} = e^{\frac{2\pi i}{19}} \in \mathbb{C}$.

(a) Bepaal $[\mathbb{Q}(\zeta_{19}) : \mathbb{Q}]$.

(b) Bepaal $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{19})/\mathbb{Q})$.

(c) Bepaal alle reële deelvelden van $\mathbb{Q}(\zeta_{19})$. (Dus alle deelvelden in $\mathbb{Q}(\zeta_{19}) \cap \mathbb{R}$.)

(d) Met een passer en een geijkt liniaal kan men de wortels construeren van alle 3de graadsvergelijkingen (met "construeerbare coëfficiënten") met 3 reële wortels.

Een complex getal heet construeerbaar met passer en geijkt liniaal als het reëel en imaginair deel beide construeerbaar zijn met passer en geijkt liniaal.

Toon aan dat alle getallen in $\mathbb{Q}(\zeta_{19})$ "construeerbaar" zijn met passer en geijkt liniaal.

(e*) Zij $f(\zeta_{19})$ een willekeurig element van $\mathbb{Z}[\zeta_{19}]$. Toon aan dat

$$N(f(\zeta_{19})) = \prod_{i=1}^{18} \zeta_{19}^i \in \mathbb{N}.$$

Men kan aantonen dat de ring $\mathbb{Z}[\zeta_{19}]$ een Euclidisch domein is met als norm N. Zij α een irreducibel element in $\mathbb{Z}[\zeta_{19}]$. Toon aan dat $\alpha\mathbb{Z}[\zeta_{19}] \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}p$ met p een priemgetal in $\mathbb{Z}$.

Toon aan dat de quotiëntring $\mathbb{Z}[\zeta_{19}]/\alpha\mathbb{Z}[\zeta_{19}]$ een eindigveld is.

Welke eindige velden kunnen we op deze manier bekomen als quotiënt van $\mathbb{Z}[\zeta_{19}]$ naar $\alpha\mathbb{Z}[\zeta_{19}]$ als we aannemen dat $\alpha\mathbb{Z}[\zeta_{19}] \cap \mathbb{Z} \neq 19\mathbb{Z}$.

Wenn man's kann ungefähr
is net schwer, is net schwer.

Der Zigeuner Baron, J. Strauss.