Numerieke Analyse. Eerste examenperiode.

NAAM :

THEORIE

1. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met $a_{ii} \neq 0$. De Gauss-Jacobi-methode gebruikt het iteratieschema

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \tag{1}$$

of als we A opsplitsen als $A = -L + D - R$ dan is de iteratie van de vorm

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+R)x^{(k)} + D^{-1}b \; .$$

De iteratiematrix voor deze methode is dus $C = D^{-1}(L+R)$.
Stelling. *De Gauss-Jacobi-methode convergeert voor elke startwaarde $x^{(0)}$ als in elke rij van A het diagonaalelement dominant is, m.a.w als*

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \qquad \textit{voor elke } i \; . \tag{2}$$

Bewijs. $\|C\| < 1$ is voldoende voor convergentie. Passen we $\|C\|_\infty$ toe, dan vinden we de gevraagde resultaten.
Gevraagd.

- Leg uit waarom $\|C\|_\infty < 1$.
- Bestaan er matrices A die niet aan (2) voldoen, maar waarvoor de Gauss-Jacobi-methode toch convergeert? Staaf je antwoord.
- Mag men de componenten $x_i^{(k+1)}$ van de vector $x^{(k+1)}$ in een willekeurige volgorde berekenen? Leg uit.
- Onderstel dat A voldoet aan

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \qquad \text{voor elke } j \; . \tag{3}$$

  Wat kan je nu besluiten over de convergentie voor de Gauss-Jacobi methode?
- Als $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, geef dan C, en geef de maat van convergentie voor de Gauss-Jacobi methode in de $\|\ \|_\infty$-norm.

2. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met eigenwaarden λ_k die voldoen aan

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots > |\lambda_n| > 0. \tag{4}$$

Gevraagd.

- Zij μ een gegeven complex getal. Welke eigenwaarde wordt gevonden als men de machtsmethode toepast op $A - \mu I$?
- Welke eigenwaarden van A zijn zuiver reëel?
- Neem bovendien aan dat A een orthonormale basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ van eigenvectoren bezit met $Av_k = \lambda_k v_k$. Stel $B = \lambda_1 v_1 v_1^T$. Welke eigenwaarde (resp. eigenvector) wordt gevonden als men de machtsmethode toepast op $A - B$?
- Welke eigenwaarde wordt gevonden als men de inverse machtsmethode toepast op $A + iI$?

3. Neem aan dat $x_0, x_1, \ldots, x_n$ onderling verschillende reële punten zijn, en $p_n(x)$ is de interpolatieveelterm door de punten (x_i, y_i). Deze veelterm kan als volgt geschreven worden :

$$p_n(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x-x_0) + \gamma_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \gamma_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \; . \tag{1}$$

Als $y_i = f(x_i)$ voor een bepaalde functie f, dan worden de coëfficiënten γ_n de n^{e} orde Newton-differentiequotiënten van f genoemd :

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \; . \end{aligned} \tag{2}$$

De Lagrange-vorm voor $p_n(x)$ wordt gegeven door

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\Psi(x)}{\Psi'(x_j)(x-x_j)} f(x_j) \; , \tag{3}$$

waarbij $\Psi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Uit (2) en (3) volgt dan dat

$$f[x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\Psi'(x_j)} \, . \tag{4}$$

Als de punten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ bovendien equidistant liggen (m.a.w. $x_j = x_0 + jh$), dan kan men een variabele t invoeren en $p_n(x)$ als volgt noteren :

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{t}{j} \Delta^j f_0, \qquad t = \frac{x-x_0}{h}, \tag{5}$$

waarbij $\Delta^m f_j$ de voorwaartse differentie van orde m voorstelt, $\Delta^m f_j = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f_{j+k}$, en $f_j = f(x_j)$.

- Moet de functie f aan bepaalde afleidbaarheidsvoorwaarden voldoen opdat (2) zou gelden?
- Wanneer bestaat de limiet $\lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1]$?
- Verklaar hoe men (4) vindt.
- Neem aan dat $f(x)$ een polynoom van graad m voorstelt. Hoe ziet men in dat $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = 0$ voor $n > m$?
- Geef in het geval van equidistante interpolatiepunten een eenvoudige uitdrukking voor $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Delta^j f_0$ in termen van de functiewaarden f_j.

4. Meervoudige-stapmethoden voor het beginwaardeprobleem

$$y' = f(t, y) \qquad a \le t \le b \qquad y(a) = \alpha$$

worden dikwijls afgeleid door de vergelijking te integreren over een interval $[x, x+k] \subset [a, b]$:

$$y(x+k) = y(x) + \int_x^{x+k} f(t, y(t))dt\,. \tag{1}$$

Bij de Adams-formules maakt men gebruik van de Newton-achterwaartse-interpolatieveelterm voor $f(t, y(t))$ door de punten $t_{p-q}, \ldots, t_{p-1}, t_p$ (neem aan dat $q \ge 2$). Voor de Adams-Bashforth-methode kiest men $[x, x+k] = [t_p, t_{p+1}]$.

De methodes van Milne zijn eveneens gesteund op (1), doch dit keer kiest men $[x, x+k]$ zodanig dat dit interval een aantal referentiepunten t_i omvat, en past men een kwadratuurformule toe voor de integraal.

- Geef voor elk van de volgende keuzes voor $[x, x+k]$ aan of de bekomen Adams-methode impliciet of expliciet is. Geef bovendien de m-waarde (in termen van q) van de bekomen m-voudige-stapmethode.

$[x, x+k]$	impliciet of expliciet	m-waarde
$[t_p, t_{p+1}]$	...	...
$[t_{p-1}, t_p]$	...	...
$[t_{p-2}, t_{p+1}]$	...	...
$[t_{p+1}, t_{p+2}]$	...	...

- Welke kwadratuurformules geven aanleiding tot een expliciete, resp. impliciete, methode van Milne?
- Hoe kan men in de praktijk impliciete meervoudige-stapmethoden gebruiken?
- Als men bij de methode van Milne $[x, x+k] = [t_{p-q-1}, t_{p+1}]$ kiest en vervolgens de Newton-Cotes-formule van open type gebruikt, bekomt men dan de Adams-Bashforth formules?

5. Zijn de volgende uitspraken waar of vals? Geef telkens een uitleg voor jouw antwoord.

   - Zij $\| \ \|$ een norm voor $\mathbb{R}^{n\times n}$, en I de $n\times n$ eenheidsmatrix. Dan is $\|I\| = 1$.
   - Positief-definiete reële matrices bezitten een unieke LU-factorisatie.
   - Neem aan dat $f \in C_2[a,b]$ en dat $\xi \in [a,b]$ een nulpunt is van f. Dan convergeert de Newton-Raphson methode voor elke startwaarde uit $[a,b]$, doch de convergentie is niet altijd kwadratisch.
   - Als $p_n(x)$ een monische veelterm van graad n is, dan geldt
   $$\max_{x\in[-1,1]} |p_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$
   - Gegeven een gewichtsfunctie $w(x)$ over $[a,b]$, en $\phi_k(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$ de orthogonale polynomen in $[a,b]$ t.o.v. $w(x)$. Als men onder het integraalteken in $I = \int_a^b w(x)f(x)dx$, $f(x)$ vervangt door $\phi_n(x)$, dan bekomt men de waarde van de Gauss-kwadratuur $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ voor I.
   - Zij $t \in \mathbb{R}$ en stel
   $$g_t(x) = (x-t)_+^n = \begin{cases} (x-t)^n & \textit{als} \quad x \geq t \\ 0 & \textit{als} \quad x < t \ , \end{cases}$$
   Dan is $\dfrac{d^n g_t(x)}{dx^n}$ een constante functie over $\mathbb{R}$.
   - Zij $f \in C_{n+1}[a,b]$, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ onderling verschillende getallen in $[a,b]$ en $p_n(x)$ de interpolatieveelterm door de punten $(x_i, f(x_i))$. Voor elke $t \in [a,b]$ bestaat er dan een $\xi(t) \in [a,b]$ zodat
   $$f(t) = p_n(t) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!}(t-x_0)\cdots(t-x_n).$$
   De functie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ met $g(t) = f^{(n+1)}(\xi(t))$ bestaat en is continu in $[a,b]$.

Numerieke Analyse. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. a) Zij $x \in \mathbb{R}^m$. Toon aan dat er steeds een Householder matrix $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ bestaat waarvoor $Hx = \sigma e_m$, met $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$ de laatste eenheidsvector van $\mathbb{R}^m$. Geef aan hoe men H kan bepalen.

   b) Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Toon aan dat A steeds kan ontbonden worden in een produkt $A = QL$ met Q een orthogonale matrix en L een benedentriangulaire matrix. Maak hiertoe gebruik van de matrices uit a).

   c) Schrijf een algoritme in pseudocode dat, voor gegeven $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en startwaarde $QT = I_n$, L en Q expliciet bepaalt (cfr. PC-oefening 4).

2. Gegeven is de tridiagonale $n \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1 & -1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Toon aan dat de eigenwaarden van A gegeven worden door $\lambda_k = 1 - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

3. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0) + Bf'(\alpha).$$

   a) Bepaal A, B en α zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?

   b) Bereken de Peano kern $K(t)$ voor de aldus bekomen kwadratuurformule.

   c) Indien $K(t)$ een vast teken heeft in $[0, 1]$, stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule.

4. Zij $f(x)$ een reëel polynoom in x van graad n. Toon aan dat

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x+k)$$

   nul is voor $m > n$.

Numerieke Analyse. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Neem aan dat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n \geq 2$) symmetrisch en positief definiet is. Om de Cholesky-decompositie GG^T van A te berekenen kan men rechtstreeks gebruik maken van het bewijs van Stelling 2.2. Hiertoe schrijft men A als

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & v^T \\ \hline v & A' \end{array} \right).$$

In de eerste stap van het algoritme voert men de volgende operatie uit op A :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & v^T \\ v & A' \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \dfrac{v^T}{\sqrt{a_{1,1}}} \\ \dfrac{v}{\sqrt{a_{1,1}}} & A' - \dfrac{vv^T}{a_{1,1}} \end{pmatrix}.$$

Op dat ogenblik zit in de eerste kolom van de matrix reeds de eerste kolom van G. De tweede stap bestaat uit een identieke operatie waardoor men de tweede kolom van G bekomt, enz. De opgave is :

   (a) Schrijf een (kort) algoritme in pseudocode voor deze methode. Hou rekening met de symmetrie van de matrices, m.a.w. pas de bovenstaande operaties enkel toe op het benedentriangulaire gedeelte (inclusief diagonaal) van A.

   (b) Hoeveel elementaire rekenkundige bewerkingen vereist de Cholesky-factorisatie met deze methode?

2. Zij $a > 0$ en $f(x) = a/(a + x)$ voor $x \in \mathbb{R}_+$. Beschouw een stel equidistante interpolatiepunten $x_j = j$ voor $j = 0, 1, 2, \ldots, N$. Toon aan dat ($m \leq N$)

$$\Delta^m f(x_0) = \frac{(-1)^m m!}{(a + 1)(a + 2) \cdots (a + m)}.$$

3. (a) Beschouw de ruimte $C[0, 1]$ met norm

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

   Zij $f(x) = 2x^3 - x^2$. Bepaal een veelterm $p(x)$ van graad 2 zodanig dat $\|f - p\|_\infty$ minimaal is. Is p uniek? Wat is de waarde van $\|f - p\|_\infty$?

   (b) Beschouw de ruimte $C[0, 1]$ met norm

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

   Zij $f(x) = 2x^3 - x^2$. Bepaal een veelterm $p(x)$ van graad 2 zodanig dat $\|f - p\|_2$ minimaal is. Is p uniek?

Numerieke Analyse. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Neem aan dat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, en schrijf A als

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix},$$

m.a.w. $A_j \in \mathbb{R}^n$ stelt de j^{e} kolom van de matrix A voor. Definieer nu

$$\|A\| = \max_{1\leq j\leq n} \|A_j\|_2,$$

waarbij $\| \ \|_2$ de gewone 2-norm voor vectoren van $\mathbb{R}^n$ voorstelt. Toon aan :

   (a) $\| \ \|$, zoals hierboven gedefinieerd, is een norm voor $\mathbb{R}^{n\times n}$.

   (b) Als $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dan geldt $\|AB\| \leq \|A\|_2 \, \|B\|$, met $\|A\|_2$ de 2-norm in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

   (c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|$.

2. Zij A een reële symmetrische $(n \times n)$-matrix. Dan kan A in $(n-2)$ stappen getransformeerd worden tot een tridiagonale (symmetrische) matrix, waarbij in elke stap k een gelijkvormigheidstransformatie wordt uitgevoerd d.m.v. een Householder-matrix (zie cursus, §4.2).

   (a) Stel een **Algoritme** op (in pseudocode) dat voor een gegeven reële symmetrische matrix A deze transformaties doorvoert. Maak hierbij gebruik van hulpvectoren p en q zoals besproken in §4.2.

   (b) Pas dit algoritme toe op

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Beschouw de volgende kwadratuurformule[1] :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx I(f) = Af(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + Bf(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

   (a) Bepaal A en B zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?

   (b) Bereken de Peano kern $K(t)$ voor de aldus bekomen kwadratuurformule.

   (c) Indien $K(t)$ een vast teken heeft in $[-1, 1]$, stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule.

   (d) Bestaat er een verband met gekende kwadratuurformules?

---

[1] $\sqrt{3} \approx 1.732 > \frac{45}{26} \approx 1.731$

Numerieke Analyse. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Gegeven is de volgende matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 2a \\ 2a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

   a) Voor welke a-waarden is A positief-definiet?

   b) Stel de iteratiematrix C op voor de iteratieve oplossing van een stelsel $Ax = b$ d.m.v. de Gauss-Seidel-methode. Geef een *nodig en voldoende voorwaarde* (in termen van a) opdat het iteratieproces zou convergeren voor een willekeurige startwaarde $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

2. De veelterm $p_n(x)$ wordt als volgt bepaald :

$$p_n(x) = (x_1 - x)(x_2 - x) \cdots (x_n - x),$$

   met $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onderling verschillende reële getallen. Beschouw verder

$$p_{j-1}(x) = -p_j'(x) = -\frac{dp_j(x)}{dx}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

   Toon aan dat $p_n(x), p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$ een Sturm-rij vormt.

3. Bepaal de monische vierdegraadsveelterm(en) $p(x)$ waarvoor

$$M = \max_{x \in [0,2]} |p'(x)| \qquad (p'(x) = \frac{dp}{dx})$$

   minimaal is. Wat is de waarde van M?

4. Beschouw onderling verschillende reële getallen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en een stel reële getallen $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Gebruik interpolatietheorie (of eventueel een andere methode) om aan te tonen dat

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\prod_{k=1}^{n}(x_j - y_k)}{\prod_{k=0(k \neq j)}^{n}(x_j - x_k)} = 1.$$