Examen Algebra I, Augustus 1996

Theorie

1. Zij K een veld en L/K een velduitbreiding.
   Stel $X \subset L$ zodat $L = K(X)$.
   Toon aan dat als elk element in X algebraïsch over K is, L/K een algebraïsche uitbreiding is.

2. Zij A, B K-algebras, K een veld. Zij $\sigma : A \to B$ een K-algebra morfisme.
   Zijn de volgende uitspraken juist of fout.
   Indien juist geef en bewijs, indien fout geef een tegenvoorbeeld.
   a) $\alpha \in A, \alpha$ K-algebraïsch $\Rightarrow \sigma(\alpha)$ K-algebraïsch
   b) $\alpha \in A, \alpha$ transcendent over $K \Rightarrow \sigma(\alpha)$ transcendent over K
   c) $X \subset A, X$ K-algebraïsch afhankelijk $\Rightarrow \sigma(X)$ (als verzameling) K-algebraïsch afhankelijk
   d) $X \subset A, X$ K-algebraïsch onafhankelijk $\Rightarrow \sigma(X)$ K-algebraïsch onafhankelijk

Oefeningen.

1. a) De veelterm $f(X) = X^3 - 3X - 1$ is irreducibel over $\mathbb{Q}$. (Bewijs!)
   b) Zij $u \in \mathbb{R}, u$ een wortel van $f(X)$.
   Druk $u^4 + 2u^3 + 3$ uit als lineaire combinatie van $1, u, u^2$.
   Gebruik hierbij de algorithme van Euclides in $\mathbb{Q}[X]$.
   c) Bepaal de inverse van $3u^2 + 7u + 5$ in $\mathbb{Q}(u)$. Gebruik de "stelling van Bezout" in $\mathbb{Q}[X]$.

2. Zij K en veld en $f, g \in K[X]$ met deg $g \geq 1$.
   Toon aan dat er unieke polynomen
   $$f_0, \ldots, f_r \in K[X]$$
   bestaan zodat
   $$f = f_0 + f_1 g + \ldots + f_r g^r$$

3. Zij R een ring, A een R-algebra en $\alpha \in A$
   a) Toon aan dat
   $$R[\alpha] \cong R[X]/I$$
   met I een ideaal in R.
   b) Stel er is een monische veelterm $g(X) \in R[X]$ zodat $g(\alpha) = 0$.
   Bewijs dat het ideaal I uit punt a), een hoofdideaal is voortgebracht door e̲e̲n̲ monische veelterm in $R[X]$.